Geometría Axiomática

y

Trigonometría

Tomo I

Geometría Plana

JOSÉ OÑATE GUILLÉN

Geometría Axiomática

y

Trigonometría

para uso de los estudiantes

POR

JOSÉ OÑATE GUILLÉN

CATEDRÁTICO DEL INSTITUTO DE SAN SEBASTIÁN

TOMO I

Geometría Plana

LOGROÑO

IMPRENTA Y LIBRERÍA MODERNA

1930

163

ES PROPIEDAD
QUEDA HECHO EL DEPÓSITO
QUE MARCA LA LEY

José Uriate

PRÓLOGO

En la introducción la obra de « Análisis Algebraico », de don Julio Rey Pastor, se leen los siguientes párrafos :

...« El rigor constituye hoy un mandato imperativo en todo libro de Matemática pura. Toda demostración no rigurosa se considera como de valor nulo. Demostraciones intuitivas, no rigurosas, tantas como se quieran, pueden darse de toda propiedad falsa. Las exigencias pedagógicas pueden obligar a prescindir de algunas demostraciones largas o difíciles, dando solamente los enunciados o una interpretación geométrica que los aclare; lo inadmisible de todo punto es dar como satisfactoria una demostración no rigurosa »...

En vista de ello, en la Geometría que publicamos nos hemos propuesto atender a todo trance a las exigencias del rigor lógico, aunque no sin gran trabajo por nuestra parte, porque la Lógica y la Pedagogía suelen tener exigencias divergentes, y teniendo en cuenta que la obra va destinada a los escolares, nos era necesario atender bien a las dos.

La demostración de un teorema tiene que fundarse en otras proposiciones anteriores, éstas, si se demuestran, se fundarán en otras anteriores, y así siguiendo tiene que llegarse a proposiciones que no se puedan demostrar, que son los *postulados*, o axiomas. De igual manera, para definir un concepto tendremos que apoyarnos en otros anteriores, y éstos, si se definen, se apoyarán en otros, y así siguiendo, se tiene que llegar a conceptos que se admitan sin definición, que son los conceptos *primitivos*. Pues bien, para que una Geometría esté lógicamente fundada, necesita establecer de un modo explícito los conceptos primitivos y los postulados que sean necesarios, evitando luego toda definición imprecisa y toda demostración no rigurosa. A la Geometría estudiada por este método se le suele llamar *axiomática*, en recuerdo de los muchos axiomas o postulados que enuncia.

Muy bellos trabajos se han hecho en este orden, pero son aún muy pocos los libros que se hacen eco de los mismos, pues la mayoría de las obras tratan los fundamentos de esta Ciencia como si no se hubiera adelantado apenas desde los tiempos de Euclides; y eso que la Geometría se considera como el más hermoso edificio intelectual que han construído los hombres.

El poco escrúpulo que se siente en general en lo que respecta al rigor lógico, explica que aun libros que fueron impuestos en 1929 como textos únicos para el Bachillerato, estén con frecuencia plagados de faltas contra las más elementales reglas de la Dialéctica. Véase por ejemplo el texto oficial de Geometría elemental, y se observará que a continuación de varias frases imprecisas y vagas sobre los primeros conceptos geométricos, que son reflejo de las que suelen servir para comenzar casi todos los tratados, se llega en la página 8 a la siguiente definición de plano: «Decimos que una superficie es plana cuando coincide con ella una recta que se le aplique en todos los sentidos».

He aquí los defectos que se observan en esta frase: una recta no puede *coincidir* con un plano, pues para ello sería necesario que todos los puntos del plano pudieran estar en la recta; no se sabe que puede significar la palabra *aplicar* una recta a una superficie; no tiene significado preciso el hablar de *sentidos* del plano, mientras no se defina éste; no debe fundarse el concepto de plano en el de *superficie*, que es mucho más complejo que el primero; y en fin, tal definición es inútil para los desarrollos posteriores, pues no contiene en sí ninguna idea precisa.

Aún es más defectuosa la definición de plano de otro texto oficial, el de Terminología, que en su página 32 dice: «Cuando una superficie está formada por líneas rectas se llama superficie plana o plano». Ahora bien, es sabido que la superficie cilíndrica, la cónica, y en general, todas las superficies regladas están formadas por líneas rectas.

Para que se vea hasta dónde puede llegar la falta de precisión, copiemos todavía otro párrafo de la citada Terminología, la cual, al pretender explicar el concepto de rectas perpendiculares, dice así en su página 36: «Una línea recta que vaya de

arriba abajo sin inclinarse a un lado más que al otro se llama *vertical;* cuando va de derecha a izquierda, *horizontal;* y si ocupa una posición distinta de la vertical y la horizontal, se llama *inclinada*. Cuando una vertical y una horizontal coinciden, se juntan en un punto, se llaman *perpendiculares*, y el ángulo (página 33) que forman es un *ángulo recto* ».

Sepan, pues, los que desprecian el rigor que se llegó a imponer como Ciencia obligatoria que la recta horizontal es la que va de derecha a izquierda. ¡ A tanto conducen los abusos en este orden !

Hasta en las definiciones más sencillas se suelen cometer descuidos lamentables Por ejemplo, con dificultad se encontrará un concepto más fácil de definir que el de mediatriz de un segmento rectilíneo, y no obstante, el citado texto oficial de Geometría elemental la define como la «perpendicular al punto medio del segmento»; sin fijarse en que los puntos no tienen perpendiculares.

Si de las definiciones pasamos a las proposiciones, se observan análogos defectos. Generalmente no se enuncian de un modo explícito más postulados que el de las paralelas; y cuando se enuncian otros se hace a veces con tanto descuido de las reglas de la Axiomática, que mejor sería no enunciarlos. Y así, en la página 9 de la misma Geometría elemental se lee : «Decimos que dos figuras son iguales, si se pueden llevar una de ellas sobre la otra de modo que coincidan. *Postulado*. Toda figura puede ocupar sucesivamente en el espacio una infinidad de posiciones diferentes sin cambiar de forma ni extensión, luego : *Para que dos figuras sean iguales es necesario y suficiente que lo sean en forma y extensión*».

Para analizar esta frase prescindamos por el momento del concepto de figuras iguales, y del recurso al movimiento, de que hablaremos enseguida, y fijémonos en que anuncia un postulado, más después, con la partícula *luego*, parece que hace una deducción, la cual, por lo demás, está mal hecha, ya que de las premisas que expone no se deduce la conclusión. Además, en ésta, que parece ser el pretendido postulado, se incluyen conceptos

tan vagos e imprecisos como los de *forma* y *extensión*, y resulta así una proposición inútil, que no se puede luego invocar en la demostración de ningún teorema.

Al no enunciarse en los libros corrientes de Geometría los necesarios postulados, tienen que resultar luego muchas demostraciones defectuosas. Y así, constantemente se leen frases como doblando la figura, resbalando, llevando a coincidir..., que pueden y deben emplearse en razonamientos intuitivos, pero no en demostraciones que se pretenda pasar por rigurosas. El movimiento no se debe emplear en Geometría más que con el carácter de explicación intuitiva, a no ser que se estudie lógicamente como transformación de figuras, postulando sus primeras propiedades en una forma que no parece pedagógicamente aconsejable.

Con lo dicho nos parece que queda justificada la adopción del método axiomático que hemos hecho en nuestra Geometría. Vamos ahora a justificar brevemente los diversos asuntos de la Geometría plana.

De propósito desechamos el empezar la obra diciendo: « Hay infinitos elementos llamados puntos »; para evitar las dificultades que pueden provenir al querer admitir « a priori » la existencia de infinitos entes actuales. Por eso mismo no tomamos como primitivos los conceptos de recta o segmento, que son demasiado complejos, sino el de punto situado entre otros dos, en el cual no intervienen más que tres puntos

La recta y el segmento los definimos, como también el plano, y en estas definiciones, como en todas las que damos en la Geometría, hemos procurado indicar de un modo preciso cuáles son los puntos que integran la figura.

Algunos postulados que admitimos, como el de la división del segmento, o el de la determinación de la recta o el plano, faltan algún tanto a la condición de simplicidad; pero lo que se pierde en elegancia lógica se gana con creces en facilidad para el estudio.

En la lección 3.ª comenzamos el estudio de la igualdad de figuras. Esta teoría es verdaderamente fundamental en la Geometría métrica. La definición clásica de las figuras iguales, que

dice que son aquellas que « superpuestas coinciden », no es admisible en la Geometría axiomática. En este caso ni aún cabe el recurso de postular antes las primeras propiedades del movimiento, pues ellas presuponen de algún modo la idea de igualdad. Los autores modernos siguen diversos procedimientos para eludir el movimiento, o sea la superposición, y pueden estudiarse en la obra : *Questioni riguardanti le matematiche elementari raccolte e coordinate da Federigo Enriques*, cuyo primer tomo ha sido traducido al español por nuestro querido exprofesor don Miguel Hoyos. En esa obra se indica el método de Hilbert como muy ventajoso; acaso el que más, si se atiende al doble punto de vista, lógico y pedagógico. Hilbert toma como primitivos los conceptos de congruencia entre segmentos y entre ángulos, y define las figuras iguales como figuras que se corresponden punto a punto, de manera que « los segmentos que tengan por extremos pares de puntos correspondientes son iguales, y los ángulos que tengan por lados segmentos correspondientes son iguales ».

El método que seguimos nosotros desde el principio de la Geometría nos permite prescindir de esta condición de los ángulos, que pasa a ser un teorema, y de esta manera nos parece haber dado un paso más en el perfeccionamiento de tan importante teoría. El principal desarrollo de ella lo hacemos en la lección 7.ª, con ocasión de la igualdad de polígonos.

Esta teoría de la igualdad nos conduce de una manera natural a otra teoría análoga para la semejanza, que desarrollamos principalmente en la lección 17. El concepto vulgar de figuras semejantes, que dice que son «figuras de igual forma y distinta extensión», carece por completo de precisión lógica.

También suele desarrollarse de una manera defectuosa la importante teoría de la medida, hasta el punto que es muy frecuente confundir la magnitud misma con el número abstracto que la mide. Y así por ejemplo, en la página 13 del texto oficial de Geometría elemental, a que antes hemos aludido, se lee : «Medir un segmento es averiguar el número de veces que contiene a otro segmento que se toma por unidad, o a una fracción de la uni-

dad. Este número se llama longitud del segmento, y depende de la unidad elegida. »

Contrariamente a lo que aquí se dice, todos entienden que la longitud es una magnitud concreta y no un número abstracto, y que la longitud de un segmento no depende de la unidad elejida.

Nosotros procuramos estudiar la medida de longitudes y la medida de áreas por los métodos que se utilizan en las obras modernas, o sea por las teorías de la igualdad de segmentos y de la equivalencia de polígonos. En las áreas adoptamos en la lección 25 un postulado sobre el área de una superficie plana, que nos permite estudiar con sencillez las áreas de figuras curvas.

En la teoría de la medida presuponemos conocida la Aritmética, y por eso no desarrollamos completamente algunas demostraciones.

Además, de un modo general, las exigencias pedagógicas nos obligan a prescindir de algunas demostraciones de teoremas que son casi evidentes, o a ponerlas en letra menuda, o en un apéndice al final de la Geometría plana. Aún así quizás parezca difícil la obra a causa de la novedad, pero debe tenerse en cuenta que para el alumno que empieza tan nuevo es el método clásico como el método axiomático, y si se le acostumbra a éste desde el principio, pronto comprenderá sus ventajas.

PROGRAMA - INDICE

INTRODUCCIÓN

Elementos Geométricos. -- Figuras Geométricas

LECCIÓN 1.ª

La recta

1. *El concepto de segmento.*
   · 1. Postulado sobre la existencia de un punto. · 2. Postulado sobre la existencia de dos puntos. · 3. Postulado sobre el punto situado entre otros dos. · 4. Definición de segmento. · 5. Postulado sobre la división del segmento. · 6. Teorema sobre dos puntos interiores a un segmento.
2. *El concepto de recta.*
   · 1. Postulado sobre las prolongaciones del segmento. · 2. Propiedad de ellas. · 3. Definición de recta. · 4. Postulado sobre la determinación de la recta.
3. *Ordenación de los puntos de una recta.*
   · 1. Ordenación de dos puntos. · 2. Idem de tres. · 3. Idem de cuatro. · 4. Ordenación de *n* puntos.
4. *Los dos sentidos de la recta.*
   · 1. Eje y vector.
5. *División de una recta por un punto.*
   · 1. Semirrecta o rayo. · 2. Segmento que une dos puntos de un mismo rayo. · 3. Idem de distinto rayo.
6. *Postulado de continuidad.*
   · 1. Clasificación de los puntos de una recta. · 2. Postulado de continuidad

LECCION 2.ª

El plano

7. *El concepto de plano.*

· 1. Postulado sobre existencia de puntos fuera de una recta. · 2. Definición de plano. · 3. Postulado sobre la determinación del plano. · 4. Recta con dos puntos en un plano. · 5. Otras determinaciones del plano.

8. *División del plano por una recta.*

· 1. Definición sobre las dos regiones del plano. · 2. Postulado sobre la división del plano. · 3. Semiplanos. · 4. Aplicación. · 5. Teorema recíproco. · 6. Trilátero.

9. *División del plano por tres rectas.*

· 1. Regiones en que queda dividido el plano. · 2. Puntos del triángulo. · 3. Idem de su prolongación por un lado. · 4. O por un vértice. · 5. Propiedad de los rayos que parten de un punto.

10. *División del plano por dos rectas que se cortan.*

· 1. Regiones en que queda dividido el plano.

11. *Elementos geométricos; figuras geométricas.*

· 1. Elementos. · 2. Figuras. · 3. Series de puntos y haces de rayos.

GEOMETRÍA PLANA

LECCION 3.ª

Igualdad de segmentos

12. *Primeras propiedades métricas.*

· 1. Postulado sobre la relación de igualdad entre segmentos. · 2. Postulado sobre las propiedades características de la igualdad. · 3. Postulado sobre segmentos iguales a uno dado. · 4. Postulado sobre segmentos desiguales. · 5. Definición de longitud.

13. *Adición de segmentos y de longitudes.*
· 1. Definiciones. · 2. Postulado sobre la suma de segmentos. · 3. Propiedad uniforme. · 4. Idem conmutativa. · 5. Idem asociativa. · 6. Generalización a las sumas de más de dos sumandos.

14. *El principio de comparación entre las longitudes.*
· 1. Longitudes mayores y menores que otras. · 2. Principio de comparación. · 3. Propiedades de las desigualdades.

15. *Sustracción de segmentos y de longitudes.*
· 1. Definición. · 2. Longitudes nulas y negativas. · 3. Sustracción de segmentos. · 4. Adición y sustracción de vectores

16. *Continuidad de las longitudes.*
· 1. Principio de densidad de las longitudes. · 2. Idem de continuidad. · 3. Clases contiguas.

17. *Multiplicación de una longitud o segmento por un número*
· 1. Definición. · 2. Propiedades. · 3. Productos por 0 y por un número negativo. · 4. Proposición de Arquímedes.

18. *División de una longitud o segmento por un número.*
· 1. Definición. · 2. Divisibilidad del segmento. · 3. Propiedades.

19. *Razón de dos segmentos.*

20. *Medida de un segmento.*
· 1. Definición. · 2. Procedimiento de medir. · 3. Medida decimal.

21. *Cálculo de los resultados de operaciones con longitudes.*

LECCION 4.ª

Angulos planos

22. *El concepto de ángulo.*
· 1. Angulos convexos. · 2. Angulos cóncavos. · 3. Angulos llanos. · 4. Definición general de ángulo.

23. *Propiedades gráficas de los ángulos.*

· 1. Propiedad del rayo interior. · 2. Idem de dos rayos interiores. · 3. Sentidos de un ángulo o haz. · 4. Principio de continuidad.

24. *Los dos sentidos del plano.*

25. *Primeras propiedades métricas de los ángulos.*

· 1. Postulado sobre la relación de igualdad entre ángulos. · 2. Postulado sobre las propiedades características de la igualdad. · 3. Postulado sobre ángulos iguales a uno dado. · 4. Postulado sobre ángulos desiguales · 5. Definición de amplitud.

26. *Adición de ángulos y de amplitudes.*

· 1. Definiciones · 2. Postulado sobre la suma de ángulos.

27. *Amplitudes absolutas.*

·1. Postulado sobre la igualdad de ángulos llanos. ·2. Relación de desigualdad entre el ángulo llano y los demás.

28. *Sustracción de ángulos y de amplitudes.*

·1. Definiciones y propiedades. ·2. Amplitudes nula y negativa. ·3. Continuidad en las amplitudes.

29. *Multiplicación o división de un ángulo o amplitud por un número.*

·1. Definiciones; Principios de divisibilidad y Arquímedes.

30. *Razón de dos ángulos o amplitudes, y medida de un ángulo.*

·1. Definiciones Unidades de medida de ángulos.

31. *Angulos particulares.*

·1. Angulos rectos. ·2. Bisectriz de un ángulo. ·3. Rectas perpendiculares. ·4. Angulos agudos y obtusos. ·5. Angulos complementarios y suplementarios. ·6. Angulos adyacentes y opuestos por el vértice.

LECCION 5.ª

Triángulos: su igualdad

32. *Elementos notables del triángulo.*

·1. Lados y ángulos. ·2. Rectas notables del triángulo.

33. *Propiedades gráficas del triángulo.*

·1. Teorema sobre la recta que pasa por un punto interior. ·2. Segmento que une dos puntos del triángulo. ·3. Segmento que une un punto interior y otro exterior.

34. *Propiedades métricas del triángulo.*

·1. Postulado sobre la igualdad de triángulos. ·2. Triángulos iguales. ·3. Igualdad directa e inversa.

35. *Primer criterio de igualdad de triángulos.*

36. *Segundo criterio de igualdad de triángulos.*

·1. El teorema. ·2. Aplicación al triángulo isósceles. ·3. Primer teorema del ángulo externo. ·4 Triángulo rectángulo. ·5. Triángulo obtusángulo. ·6. Perpendicular a una recta por un punto.

37. *Tercer criterio de igualdad de triángulos.*

38. *Cuarto criterio de igualdad de triángulos.*

·1. El teorema general. ·2. Aplicación a los triángulos rectángulos. ·3. Triángulo que tiene dos de sus ángulos iguales.

39. *El criterio dudoso de igualdad de triángulos.*

·1. El teorema general. ·2. Aplicación a los triángulos rectángulos.

LECCIÓN 6.ª

Relaciones de desigualdad en los triángulos

40. *Relaciones de desigualdad entre los lados de un triángulo.*

·1. Caso del triángulo rectángulo. ·2. Caso de un triángulo cualquiera. ·3 Aplicaciones.

41. *Comparación entre las magnitudes de los lados y las de sus ángulos opuestos en un triángulo.*

·1. Teoremas directos y recíprocos. ·2. Segundo principio de inversión.

42. *Triángulos con dos lados respectivamente iguales.*

·1. Teorema directo. ·2. Teorema recíproco.

LECCIÓN 7.ª

Líneas poligonales y polígonos

43. *Líneas poligonales o quebradas.*

·1. Definiciones. ·2. Clasificación de las poligonales.

44. *División del plano por una poligonal convexa y cerrada.*

45. *Polígonos convexos.*

·1. Definición. ·2. Propiedades gráficas.

46. *Igualdad de polígonos convexos.*

·1. Figuras iguales. ·2. Propiedades principales de las figuras iguales. ·3. Condición general de igualdad de dos polígonos convexos. ·4. Criterios de igualdad de polígonos convexos. ·5. Aplicación a los cuadriláteros. ·6. Número de condiciones para la igualdad de dos polígonos convexos.

47. *Relaciones de desigualdad en los polígonos convexos.*

·1. Relación entre un lado y la suma de los demás. ·2. Polígono inscrito en otro. ·3. Idem, comprendido. ·4. Poligonales envolventes y envueltas.

48. *Polígono en general.*

LECCION 8.ª

Rectas paralelas y rectas perpendiculares

49. *Rectas paralelas.*

·1. Recta secante a otras dos. · Secante que forma ángulos desiguales. ·3. Existencia de rectas que no se cortan. ·4. Postulado de Euclides. ·5. Definición de rectas paralelas.

50. *Criterios de paralelismo.*

·1. Teorema fundamental. ·2. Significado de la frase «es condición necesaria y suficiente.» ·3. Primer principio de inversión. ·4. Rectas que forman ángulos conjugados no suplementarios. ·5. Perpendicular y oblicua a una recta.

·6. Recta perpendicular a una de dos paralelas. ·7. Perpendiculares a dos rectas que se cortan. ·8. Rectas perpendiculares a una tercera.

51. *Perpendiculares y oblicuas.*

·1. Perpendiculares y oblicuas trazadas desde un punto a una recta. ·2. Recíprocos.

52. *Lugares geométricos.*

·1. Definición. ·2. La mediatriz como lugar geométrico. ·3. La bisectriz.

LECCION 9.ª

Aplicación a los triángulos y cuadriláteros

53. *Suma de los ángulos de un triángulo.*

·1. El teorema. ·2. Segundo teorema del ángulo externo. ·3. Angulos agudos del triángulo rectángulo.

54. *Suma de los ángulos de un polígono.*

·1. El teorema. ·2. Aplicación a los cuadriláteros.

55. *Cuadriláteros especiales.*

·1. Trapecio. ·2. Paralelogramo. ·3. Propiedades de los lados y ángulos. ·4. Idem de las diagonales. ·5. Criterios para reconocer un paralelogramo. ·6. Equidistancia de las paralelas. ·7. Lugar geométrico correspondiente. ·8. Base y altura de un paralelogramo.

56. *Paralelogramos especiales*

· 1· Rombo. · 2. Rectángulos. · 3. Cuadrado.

LECCION 10

Circunferencia de círculo

57. *La circunferencia y sus elementos.*

· 1. Definición. · 2. Radios. · 3. Diámetros. · 4. Círculo. · 5. Compás. · 6. Arcos.

58. *Posiciones relativas de una recta y una circunferencia.*
· 1. Casos que pueden ocurrir. · 2. Recíprocos. · 3. Teorema de la tangente.

59. *Distancias de los puntos de una circunferencia a un punto de su plano.*

60. *Posiciones relativas de dos circunferencias.*
· 1. Casos que pueden ocurrir. · 2. Teorema de las circunferencias tangentes.

61. *Aplicaciones a la resolución de problemas gráficos.*
· 1. Operaciones a las que se reduce la resolución. 2. Trazar la mediatriz de un segmento. · 3. Trazar la bisectriz de un ángulo. · 4. Trazado de la perpendicular a una recta por un punto. · 5. Trazado de paralelas.

LECCION 11

Propiedades de arcos y cuerdas

62. *Circunferencias que pasan por tres puntos.*
· 1. Caso de puntos no alineados. · 2. Caso de tres puntos alineados. · 3. Circunferencias que pasan por dos puntos, y círculo circunscrito a un triángulo.

63. *Circunferencias tangentes a tres rectas.*
· 1. Caso de tres rectas que forman triángulo. · 2. Caso de tres rectas, dos de las cuales son paralelas y la tercera las corta. · 3. Caso de tres rectas paralelas o concurrentes.

64. *Propiedades gráficas de los arcos de circunferencia.*
· 1. Propiedad del punto interior. · 2. Idem de dos puntos interiores. · 3. Sentidos de un arco o circunferencia. · 4. Continuidad.

65. *Propiedades métricas de los arcos de circunferencia.*
· 1. Arcos con radios iguales y ángulos en el centro iguales.
· 2. Caso de la circunferencia, del sector circular o del círculo.
· 3. Teoremas recíprocos. · 4. Amplitud de los arcos.

66. *Propiedades de las cuerdas y de los diámetros.*
· 1. Definiciones de cuerda, arco correspondiente a una cuerda y segmento circular. · 2. Mediatriz de una cuerda.

67. *Relaciones entre arcos y cuerdas.*
· 1. Directos. · 2. Recíprocos.

68. *Relaciones entre las cuerdas y sus distancias al centro.*
· 1. Directos. · 2. Recíprocos.

69. *Aplicaciones a problemas gráficos.*
· 1. Trazado de ángulos iguales. · 2. Suma o resta de ángulos. · 3. Construcción de un triángulo, dados un lado y los dos ángulos adyacentes. · 4. O dos lados y el ángulo comprendido. · 5. O los tres lados. · 6. O un lado, el ángulo opuesto y el ángulo adyacente. · 7. O un ángulo, el lado opuesto y un lado adyacente.

LECCION 12

Angulos en la circunferencia

70. *Angulo inscrito en una circunferencia.*
· 1. Angulos centrales. · 2 Angulo inscrito. · 3. Amplitud de un ángulo inscrito. · 4. Angulo inscrito en una semicircunferencia. · 5. Angulos inscritos en el mismo arco. · 6. Cuadrilátero inscrito. · 6. Angulo semiinscrito.

71. *Angulo interior.*

72. *Angulo exterior.*

73. *Aplicaciones a problemas gráficos.*
· 1. Trazado de ángulos rectos. · 2 Tangentes a una circunferencia por un punto dado. · 3. Propiedades del ángulo circunscrito. · 4. Construcción del arco capaz de un ángulo dado. · 5. Lugar geométrico correspondiente. · 6. Construir un triángulo dado un lado, el ángulo opuesto y la altura que parte del vértice de éste.

74. *Polígonos inscritos y circunscritos.*
· 1. Polígonos inscritos en una circunferencia. · 2. Polígonos circunscritos a una circunferencia. · 3. Relaciones entre los perímetros. · 4. Generalización.

75. *Polígonos regulares.*
· 1. Definición. · 2. Formación. · 3. Teorema recíproco. · 4. Valor del ángulo. · 5. Idea de los polígonos estrellados.

LECCION 13

Figuras simétricas

76. *Simetría con respecto a un centro.*
· 1. Definición. · 2. Propiedad fundamental. · 3. Consecuencias inmediatas. · 4. Simetría plana. · 5. Construcción de figuras simétricas.

77. *Centros de simetría de las figuras.*
· 1. Definición. · 2. Centros de simetría de orden superior.

78. *Simetría con respecto a un eje.*
· 1. Definición. · 2. Propiedad fundamental. · 3. Consecuencias inmediatas. · 4. Simetría plana. · 5. Construcción de figuras simétricas.

79. *Ejes de simetría de las figuras.*
· 1. Definición. · 2. Ejemplos.

80. *Demostraciones por simetría o por igualdad.*
· 1. Simplificación de algunas demostraciones. · 2. Problema. · 3. Caso análogo.

LECCION 14

Semejanza de triángulos

81. *El concepto de triángulos semejantes.*
· 1. Definición. · 2. Expresión de la proporcionalidad de los lados. · 3. Propiedades.

82. *Teorema fundamental de la semejanza de triángulos.*
· 1. Teorema sobre segmentos iguales. · 2. División de un segmento en partes iguales. · 3. Teorema sobre segmentos proporcionales. · 4. Generalización. · 5. Construcción de la cuarta proporcional a tres longitudes dadas. · 6. Teorema fundamental de la semejanza de triángulos. · 7. Recíproco.

83. *Criterios de semejanza de triángulos.*
· 1. Primer criterio. · 2. Segundo. · 3. Tercero. · 4. Criterio dudoso.

LECCION 15

Aplicaciones de la semejanza de triángulos

84. *Rectas paralelas cortadas por concurrentes.*
· 1. El teorema. División de un segmento en partes proporcionales a otros. · 3. Teorema general de las rectas proporcionales.

85. *Teorema del triángulo de lados mitad.*
· 1. Teorema directo. · 2. Recíproco. · 3. Aplicación al trapecio.

86. *Triángulos de lados paralelos o perpendiculares.*
· 1. Angulos de lados paralelos. · 2. Angulos de lados perpendiculares. · 3. Triángulos de lados paralelos o perpendiculares.

87. *Rectas antiparalelas.*
· 1. Semejanza directa e inversa. 2. Rectas antiparalelas. · 3. Propiedad fundamental.

LECCION 16

Relaciones métricas entre el triángulo y la circunferencia

88. *Relaciones en el triángulo rectángulo.*
· 1. Relación entre los catetos y sus proyecciones sobre la hipotenusa. · 2. Teorema de Pitágoras. · 3. Valor de la altura perpendicular a la hipotenusa.

89. *Relaciones en un triángulo cualquiera.*
· 1. Relaciones entre los tres lados. · 2. Idea sobre el cálculo de alturas.

90. *Propiedades de las bisectrices de un triángulo.*
· 1. Relación entre las distancias del pie a los vértices.

91. *Potencia de un punto respecto de una circunferencia.*
· 1. El concepto de potencia. · 2. Su cálculo.

92. *Relaciones métricas entre cuerdas y diámetros.*
· 1. Tres teoremas fundamentales.

93. *Eje radical de dos circunferencias y centro radical de tres.*
· 1. Eje radical. · 2. Centro radical.

94. *Aplicación a problemas gráficos y de cálculo.*
· 1. Construcción de la media proporcional de dos segmentos. · 2. Problemas gráficos sobre los triángulos: construirlo cuando se dan la altura, bisectriz y mediana que parten de un vertice. · 3. Cálculo de los elementos de un triángulo. · 4. Teorema de las isogonales. · 5. Isogonal de la bisectriz. · 6. Idem de la altura. · 7. Idem de la mediana.

LECCION 17

Figuras semejantes

95. *El concepto de figuras semejantes.*
· 1. Definición.

96. *Propiedades de las figuras semejantes.*
· Propiedades reflexiva, simétrica y transitiva. · 2. Semejanza de las figuras iguales. · 3. Los segmentos como figuras semejantes · 4. Puntos en línea recta. · 5. Figura parte de otra. · 6. Igualdad de los ángulos homólogos. · 7. Triángulos homólogos

97. *Semejanza entre rectas y planos.*
· 1. Series semejantes. · 2. Semejanza directa e inversa. · 3. Figuras planas semejantes. · 4. Semejanza directa e inversa. · 5. Demostraciones por semejanza.

98. *Caso particular de las figuras semejantes.*
· 1. Figuras homotéticas. · 2. Propiedad fundamental y construcción.

99. *Polígonos semejantes.*
· 1. Condición general de semejanza de polígonos convexos. · 2. Criterios de semejanza de los mismos.

LECCION 18

Construcción y cálculo de polígonos regulares

100. *Polígono regular cualquiera.*

· 1. Angulos central y del polígono. · 2. Idea sobre construcción y cálculo de polígonos regulares.

101. *El triángulo equilátero y el exágono regular.*

· 1. Los ángulos · 2. Construcción. · 3. Cálculo. · 4. Observación sobre el centro del triángulo equilátero.

102. *El cuadrado.*

· 1. Construcción y cálculo.

103. *El decágono y pentágono regulares.*

· 1. Sección áurea de un segmento. · 2. Propiedad fundamental de la sección áurea. · 3. Construcción de la porción áurea de un segmento. · 4. Cálculo. · 5 Relación entre el lado del decágono regular y el radio. · 6. Relación entre el lado del pentágono regular, el del decágono y el radio · 7. Construcción del pentágono y decágono regular.

104. *Otros polígonos regulares.*

· 1. Polígono de 2n lados. · 2. Construcción del pentadecágono.

105. *Polígono circunscrito de n lados.*

LECCION 19

Longitudes de curvas

106. *Longitud de una circunferencia y de un arco.*

· 1. Longitud de una circunferencia. · 2. Longitud de un arco.

107. *Relación entre una circunferencia y su diámetro.*

· 1. Semejanza entre circunferencias. · 2. Relación entre los perímetros de dos polígonos semejantes. · 3. Proporcio-

nalidad entre las longitudes de las circunferencias y sus diámetros. · 4. Idea sobre el cálculo de π. · 5. Rectificación gráfica de la circunferencia. · 6. Cálculo de la circunferencia o del radio.

108. *Relación entre la longitud de un arco: su amplitud y su radio.*

· 1. Proporcionalidad entre las longitudes y amplitudes, y entre las longitudes y los radios. · 2. Relación que se deduce · 3. Unidad natural de amplitudes.

109. *Relación entre las longitudes de dos líneas semejantes,*

· 1. Figura perfecta. · 2. El concepto de línea plana. · 3. Longitud de una línea. · 4. Longitudes de líneas semejantes. · 5. Pantógrafo.

LECCION 20

Figuras armónicas

110. *Puntos conjugados armónicos.*

· 1. Construir los puntos de una recta cuya razón de distancias a dos puntos de ella sea dada. · 2. Puntos conjugados armónicos. · 3. Bisectrices de un ángulo de un triángulo. · 4. Centros de semejanza de dos circunferencias. · 5. Conjugado armónico del punto medio de un segmento. · 6. Reciprocidad de los puntos conjugados armónicos.

111 *Rectas conjugadas armónicas.*

·1. Propiedad fundamental. ·2. Rectas conjugadas armónicas. ·3. Caso de las bisectrices de un ángulo. ·4. Generalización del teorema anterior.

112. *Polos y polares respecto de una circunferencia.*

·1. Construcción del conjugado armónico por medio de la circunferencia. ·2. Relaciones métricas entre los segmentos determinados por puntos conjugados armónicos. ·3. Polo y polar. ·4. Distancia del centro al polo y a la polar.

LECCION 21

Líneas de segundo orden

113. *La parábola.*

·1. Definición. ·2. Construcción por puntos. ·3. División del plano por una parábola ·4. Posiciones relativas de una parábola y una recta. 5. Propiedades de las tangentes.

114. *La elipse.*

·1. Definición. ·2. Construcción por puntos. ·3. Elementos más notables de la elipse. ·4 Posiciones relativas de una elipse y una recta ·5. Propiedades de las tangentes.

115. *La hipérbola.*

·1. Definición. ·2. Construcción por puntos. ·3. Elementos más notables de la hipérbola. ·4 Posiciones relativas de una hipérbola y una recta. ·5. Propiedades de las tangentes. ·6. Otras líneas de segundo orden.

LECCION 22

Ecuaciones de la recta y de las líneas de segundo orden

116. *Ecuación de la recta.*

·1. Coordenadas cartesianas rectangulares. ·2. Ecuación de una línea. ·3. Ecuación de la recta.

117. *Ecuación de la circunferencia.*

·1. Caso de ejes que pasan por el origen. ·2. Caso de ejes cualesquiera.

118. *Ecuación reducida de la parábola.*

119. *Ecuación reducida de la elipse.*

120. *Ecuación reducida de la hipérbola.*

121. *Ecuación general de las líneas de segundo orden.*

LECCIÓN 23

Equivalencia de los polígonos

122. *El concepto de polígonos equivalentes.*
·1. Definición. ·2. Primeras propiedades.

123. *Suma de polígonos adyacentes.*
·1. Definición. ·2. Propiedades.

124. *Equivalencia de paralelogramos.*
·1. Equivalencia de un paralelogramo y un rectángulo.
·2. Equivalencia de paralelogramos entre sí.

125. *Equivalencias de triángulos y trapecios.*
·1. Caso de triángulos. ·2. Caso de trapecios.

126. *Transformaciones de polígonos en otros equivalentes.*
·1. Transformación de un polígono en otro equivalente y con un lado menos. ·2. Transformación de un rectángulo en otro equivalente de base dada. ·3. Transformación de un polígono en un rectángulo de base dada. ·4. Postulado de la equivalencia de polígonos.

LECCION 24

Areas de los polígonos

127. *El concepto de área.*
·1. Definición. ·2. Las áreas como magnitudes medibles. ·3. Suma de áreas. ·4. El principio de comparación entre las áreas. ·5. Continuidad de las áreas. ·6. Otras operaciones.

128. *Area de un rectángulo.*
·1. Caso de un rectángulo cualquiera. ·2. Area de un cuadrado.

129. *Area de un paralelogramo.*

130. *Areas de un triángulo y de un trapecio.*
·1. Triángulo. ·2. Trapecio.

131. *Area de un polígono.*
·1. Area de un polígono regular. ·2. Polígono cualquiera. ·3. Area de un cuadrilátero

132. *Cuadratura de figuras.*
·1. Problema de cuadraturas. ·2. Transformación de un polígono en cuadrado equivalente. ·3. Procedimiento numérico.

LECCION 25

Areas de las figuras circulares

133. *Area del círculo.*
·1. Superficie plana. ·2. Postulado sobre el área de una superficie plana. ·3. Valor del área del círculo. ·4. Cuadratura.

134. *Area de un sector circular.*
·1. Regla general. ·2. Expresión en función del radio y el ángulo.

135. *Area de otras figuras circulares.*
·1. Area de una corona circular. ·2. Area de un segmento circular.

LECCION 26

Relación entre las áreas de dos figuras semejantes

136. *Areas de polígonos semejantes.*
·1. Triángulos. ·2. Polígonos.

137. *Areas de otras figuras planas semejantes.*
·1. Círculos. ·2. Caso general.

138. *El teorema de Pitágoras expresado por áreas.*
·1. Caso particular. ·2. Demostración por áreas. ·3. Caso general. ·4. Lúnulas de Hipócrates. ·5. Aplicaciones.

LECCIÓN 27

Métodos generales para la resolución de problemas geométricos

139. *Idea sobre la resolución de problemas.*

140. *Método de los lugares geométricos.*

· 1. Regla. · 2. Ejemplos: Construir una circunferencia de radio dado y que pase por dos puntos dados; o que pase por un punto y sea tangente a una recta o circunferencia dada.

141. *Método de semejanza.*

· 1. Regla. · 2. Ejemplo: construir un triángulo dados dos ángulos y el perímetro.

142. *Método de figuras parciales.*

· 1. Regla. · 2. Ejemplos: construir un paralelogramo dados dos lados y la diagonal que une sus extremos libres, y construir las tangentes comunes a dos circunferencias.

143. *Introducción de los datos en las figuras.*

· 1. Construir un triángulo dados un ángulo, un lado adyacente y la suma de los otros dos lados; o conocidos dos lados y la mediana que parte del vértice común.

144. *Problemas numéricos.*

155. *Método de la Geometría Analítica.*

· 1. Idea del método. Ejemplo: hallar los puntos comunes a una elipse y la bisectriz del ángulo de los ejes.

146. *Construcción de expresiones algebraicas.*

· 1. Expresiones monomias. · 2. Expresiones polinomias. · 3. Expresiones irracionales.

147. *Resolución gráfica de la ecuación de segundo grado.*

Geometría y Trigonometría

INTRODUCCIÓN

Elementos Geométricos.-Figuras Geométricas

LECCIÓN 1.ª

LA RECTA

1. El Concepto de segmento

Para estudiar racionalmente la Geometría debemos comenzar por establecer algunas *proposiciones primitivas* o *postulados*, que se admiten sin demostración, en algunos de los cuales intervienen *conceptos primitivos*, que se admiten sin definición.

·1. *Postulado sobre la existencia de un punto. Existe al menos un punto.* Esta proposición incluye un concepto primitivo, el concepto de *punto*, que tenemos que admitirlo sin definición. Si lo dejamos indeterminado, tendremos una Geometría *abstracta*, en la cual un punto puede ser, por ejemplo, un número. En la Geometría *intuitiva*, la imagen del punto es la de un cuerpo pequeñísimo, cuyo tamaño es inapreciable en todos los casos.

·2. *Postulado sobre la existencia de dos puntos. Dado un punto* A, *existe al menos otro punto* B, *distinto del* A.

·3.—*Postulado sobre el punto situado entre otros dos. Dados dos puntos cualesquiera,* A *y* B, *existe al menos otro punto* C, *que está entre los* A *y* B. (Fig. 1.ª).

Fig. 1.ª

Este tercer postulado incluye otro concepto primitivo, el de *punto situado entre otros dos.* En la Geometría abstracta ese concepto puede quedar indeterminado; puede significar, por ejemplo, que dados dos números hay siempre otro mayor que uno de ellos y menor que el otro. Mas para saber a qué idea nos referimos en la Geometría intuitiva, supondremos un *hilo tirante*, que empieza en A y acabe en B; si el hilo pasa por C, diremos que C está entre A y B, no estándolo en caso contrario.

Para entendernos, cuando digamos *figura*, queremos decir, por ahora, conjunto de puntos. Y un conjunto, diremos que es *parte* de otro, cuando todos los elementos del primero pertenecen al segundo, pero éste tiene elementos que no pertenecen al primero.

Con esto podemos definir el segmento.

·4. *Definición de segmento. Dados dos puntos* A *y* B, *se llama segmento* AB, *o segmento* BA, *la figura formada por los puntos* A *y* B, *y los que están entre ambos.* Los puntos A y B se llaman *extremidades* del segmento, y los demás se llaman *interiores* al segmento.

Hasta ahora aún no sabemos si el segmento tiene más de tres puntos, ni cómo debemos dibujarlo. Necesitamos otro postulado.

·5. *Postulado sobre la división del segmento. Todo punto* C, *interior a un segmento* AB, *lo divide en dos partes, que son los segmentos* AC *y* CB, *los cuales no tienen más punto común que* C.

Con este enunciado sencillo queremos decir, que todo punto de AC o de BC pertenece al segmento AB; que todo punto de AB pertenece al AC o al BC, y que solamente el C pertenece simultáneamente a estos dos. En particular, ni A está en CB, ni B está en AC.

·6. *Teorema. Si* C *y* D *son interiores a un segmento, el segmento* CD *es una parte del primero.* (Fig. 2.ª).

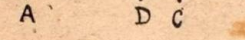


Fig. 2.ª

Pues si C es interior al segmento AB, le divide en dos partes (**1** ·3), y si D es también interior al AB, tiene que estar en una de esas dos partes, por ejemplo, en AC. Entonces, AC es una parte de AB, y CD es una parte de AC, luego CD será una parte de AB.

De aquí deducimos que el segmento AB tiene *infinitos puntos*, pues entre A y B existe al menos un punto C (**1** ·3), y entre A y C otro D, que estará entre A y B (**1** ·5), y entre C y D otro, que estará entre A y B, y así sucesivamente.

Se comprende también que el segmento debemos dibujarlo por un trazo sin interrupciones (fig. 3.ª).

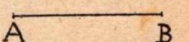
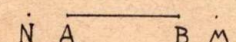


Fig. 3.ª

2. El Concepto de recta

Para estudiar las prolongaciones del segmento, enunciemos otro postulado (fig. 4.ª).



Fg. 4.ª

·1. *Postulado sobre las prolongaciones del segmento. Dado un segmento cualquiera,* AB, *existe al menos un punto,* M, *tal que* B *es interior al segmento* AM, *y otro,* N, *tal que* A *es interior al segmento* BN.

Los puntos tales como el M forman una figura que se llama *prolongación del segmento* AB *por* B; y los puntos tales como el N forman otra figura llamada prolongación del segmento AB por A.

·2. *Teorema. Un segmento* AB *y sus dos prolongaciones son tres figuras sin puntos comunes.* Pues si M está en la prolongación de AB por B, este B es interior al segmento AM, luego M no está en AB, ni A está en BM (**1** ·5); así es que M ni está en AB, ni está en la prolongación de AB por B. Las tres figuras forman otra, a saber :

·3. *Definición de recta. Dados dos puntos,* A y B, *se llama recta* AB, *o* BA, *la figura formada por el segmento* AB *y por sus dos prolongaciones.*

Para saber si en las prolongaciones del segmento AB hay más de un punto y ver cómo debemos dibujar la recta, enunciemos otro postulado.

·4. *Postulado sobre la determinación de la recta. Dos puntos determinan una recta.* Quiere decir, que por dos puntos no pasa más de una recta. Una ya sabemos que pasa por la misma definición.

La misma idea se expresa diciendo que dos rectas no pueden tener más de un punto común, o que si M y N son dos puntos de una recta AB, las rectas MN y AB son una misma, o coinciden.

De aquí que también debamos dibujar una recta AB por un trazo sin interrupciones (fig. 5.ª), pero al contrario que en el segmento, debemos suponer que la recta no tiene extremidades, pues dado un punto M de ella, la prolongación de AM sigue perteneciendo a la recta.

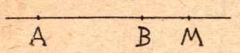


Fig. 5.ª

Se expresa esta idea diciendo que la recta es *indefinida.*

3. Ordenación de los puntos de una recta

De los postulados anteriores deduciremos lo siguiente :

·1. *Ordenación de dos puntos.* Dos puntos A y B de una recta pueden enunciarse, evidentemente, en estos dos órdenes opuestos : AB, BA.

En el primer caso se dice que el A *precede* al B, y que B *sigue* al A; en el segundo caso que B precede a A, y A sigue a B.

·2. *Ordenación de tres puntos. Dados tres puntos* A, B *y* C *de una recta, uno, y uno solo de ellos, está entre los otros*

dos (fig. 6.ª). Pues dos de los puntos, por ejemplo, los A y B dividen a la recta en tres partes, sin puntos comunes, que son el segmento AB y sus dos prolongaciones, y C tiene que estar en una de las tres, por ejemplo en la prolongación por B, en cuyo caso B está entre A y C, sin que A esté entre B y C, ni C entre A y B (1 ·5).

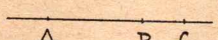


Fig. 6.ª

Si llamamos *orden natural* de los tres puntos el enunciarlos de manera que el segundo sea el situado entre los otros, resulta :

Tres puntos dados de una recta no admiten más que dos órdenes naturales, opuesto uno de otro. En nuestro caso son : ABC, CBA. Cuando se enuncian ABC, se dice que A precede a los otros dos, que B precede a C y sigue al A, y que C sigue a los otros dos.

·3. *Ordenación de cuatro puntos.* Varios puntos se dice que se enuncian en orden natural cuando el segundo está entre el primero y cualquiera de los otros; el tercero, está entre cualquiera de los dos primeros, y cualquiera de los demás, y así sucesivamente.

Cuatro puntos de una recta pueden enunciarse en dos órdenes naturales opuesto uno de otro, solamente.

Pues si los puntos son A, B, C y D, coloquemos tres de ellos en orden natural, y sea por ejemplo ABC; la recta quedará dividida por estos tres, en cuatro partes, que son AB, BC y las prolongaciones de AC; y en alguna de estas cuatro partes tiene que estar D, por ejemplo en la prolongación de AC por C (figura 7.ª). Entonces son ordenaciones naturales ABCD y su inversa, DCBA, porque B está entre A y C por hipótesis (3 ·2); también está entre A y D por estar C entre A y D (1 ·5); asímismo, C está entre A y D; y también está entre B y D, ya que no puede estar B entre C y D, ni D entre B y C (1 ·5). Y es claro que cualquier otro enunciado de los cuatro puntos no puede ser ordenación natural, porque habrá tres de los puntos que no lo estarán. Lo mismo para los otros casos.

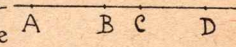


Fig. 7.ª

·4. *Ordenación de* n *puntos. Dados* n *puntos de una recta se pueden enunciar en dos órdenes naturales opuestos uno de otro, solamente.*

Se puede demostrar por inducción, suponiendo que se veri-

fica para (n — 1) puntos y añadiendo otro. No lo hacemos, por brevedad.

4. Los dos sentidos de una recta

En toda recta se pueden considerar dos sentidos opuestos, que se determinan considerando dos puntos de la recta, y eligiendo cuál de ellos precede al otro.

En efecto, si convenimos en decir que el punto A precede al B, tomando otros dos puntos M y N de la recta, uno de ellos precederá al otro, porque los cuatro puntos A, B, M, N admitirán una ordenación natural en la que A preceda a B, y una sola, y en esa ordenación uno de los puntos M o N precederá al otro. Vemos, pues, que con dos puntos nos basta para elegir un sentido en la recta, de tal manera que para cualquier otro par de puntos, de la misma, queda determinado el orden. Y como *n* puntos no admiten más que una ordenación natural, y su inversa, no habrá en la recta más que un sentido, y su opuesto; siendo por eso mismo esos sentidos, independientes de los puntos que se elijan para definirlos.

·1. *Eje* y *vector*. Una recta, tal como la AB de la figura 8.ª, en la cual se eligé un sentido, como por ejemplo, el sentido en el cual A precede a B, se llama *eje*. Y un segmento, en el que se elige un sentido, se llama *vector*. El primer punto del vector se llama *origen* y el último, *extremo;* y se enuncia el vector, enunciando antes el origen que el extremo. Así, el vector $\overline{MN}$ de la figura 8.ª, tiene el mismo sentido que el eje $\overline{AB}$; y el vector $\overline{NM}$, sentido opuesto a ese eje, $\overline{AB}$.

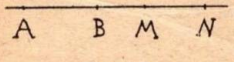


Fig. 8.ª

5. División de una recta por un punto

De los teoremas sobre ordenación de puntos de una recta se deduce :

·1. *Todo punto* O *de una recta la divide en dos partes, llamadas semirrectas o rayos, que no tienen común más que el punto* O, *llamado origen de las semirrectas, formada la una por el punto* O *y todos los que le preceden en un cierto sentido, y la otra por el punto* O *y todos los que le siguen.* (Figura 9.ª).

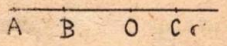


Fig. 9.ª

En efecto, elegido un sentido, para todo punto de la recta, distinto del O, se verifica una sola de estas dos cosas: o precede al O, o le sigue, y pertenecerá a una sola de las semirrectas.

Los dos rayos en que O divide a la recta tienen las propiedades :

·2. *Un segmento, tal como el* AB, *que una dos puntos de un mismo rayo, distintos del* O, *es un segmento que no contiene a* O. Pues si lo contuviera, uno de los dos puntos precedería al O y el otro no.

·3. *Un segmento, tal como el* BC, *que una dos puntos de distinto rayo, contiene al punto* O. Pues si no lo contuviera, los dos puntos precederían o seguirían simultáneamente al O.

6. Postulado de continuidad

Para completar las propiedades gráficas de los segmentos debemos enunciar otro postulado, que es una de las más bellas conquistas de la crítica moderna. Viene a ser el inverso del anterior teorema.

·1. *Clasificación de los puntos de una recta.* Si consideramos en la misma figura anterior, el punto O, de la recta AB, todos los puntos de esta recta podemos clasificarlos en dos clases, sin puntos comunes; la una clase formada por los puntos de uno de los rayos de origen O, por ejemplo, del que consideramos primero, y la otra clase, formada por los puntos del otro rayo, menos el O. Como los dos rayos no tenían más que el punto común O, esas dos clases no tendrán puntos comunes. Tienen estas propiedades :

a) Todo punto de la primera clase precede a todo punto de la segunda.

b) Todo punto de la recta pertenece a una de las dos clases, pero no a las dos.

Y vemos que existe un punto de separación de las dos clases, que es el O, entendiendo por tal, un punto que puede pertenecer a la primera clase o a la segunda, pero todos los puntos que preceden a él pertenecen a la primera clase, y los que le siguen, a la segunda. Pues, bien, recíprocamente, el postulado de continuidad afirma que tal punto de separación existe con cualquier clasificación que cumpla las condiciones anteriores; es decir:

·2. *Postulado de continuidad. Si todos los puntos de una recta (o segmento), se clasifican en dos clases tales que:*

a) Todo punto de la primera clase preceda a todo punto de la segunda; y

b) Todo punto de la recta (o segmento), pertenezca a una de las dos clases,

existe un punto de separación que puede pertenecer a cualquiera de las dos clases, pero tal, que todo punto que le preceda pertenece a la primera clase, y todo punto que le siga, pertenece a la segunda. (Dedeking).

Ejercicios

Completar la demostración del teorema (2 ·2).

LECCIÓN 2.ª

EL PLANO

7. Concepto de plano

Los postulados estudiados en la lección 1.ª no nos dicen que existen puntos fuera de una recta; esto tenemos que postularlo :

·1. *Postulado sobre existencia de puntos fuera de una recta. Fuera de toda recta existe al menos un punto.* Es decir, que para toda recta que se nos dé, tal como la AB (fig. 10), existe al menos un punto, C, que no está en la recta. Es claro, que si consideramos cualquiera de las rectas que pasan por C y por un punto de AB, esa recta no podrá tener con la AB más que un punto común (2 ·4), y por tanto todos sus puntos, excepto ése, están fuera de AB, lo que prueba que fuera de toda recta existen infinitos puntos.

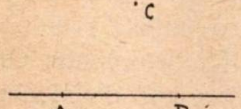


Fig. 10

·2. *Definición de plano.* Dados tres puntos que no están en línea recta, A, B, C (fig. 11), consideremos todas las rectas que pasan por A y por algún punto del segmento BC, y todas las que pasan por B y por algún punto del segmento AC, y todas las que pasan por C y por algún punto del segmento AB; *la figura formada por los puntos que pertenecen a una, por lo menos, de estas rectas, se llama plano ABC.*

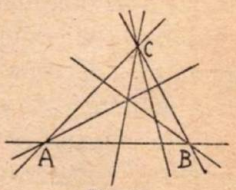


Fig. 11

No importa que un punto de esos pertenezca a más de una recta.

En particular, los puntos de las rectas AB, BC, CA, pertenecen por definición al plano ABC.

Una imagen experimental de un trozo de plano intuitivo nos la suministra la superficie de un estanque de aguas tranquilas.

Para estudiar las propiedades del plano, postulemos su determinación.

·3. *Postulado sobre la determinación del plano. Tres puntos no alineados determinan un plano.* Es decir, que por tres puntos no situados en línea recta, no puede pasar más que un plano. Que pasa uno, se deduce de la misma definición de plano. La misma idea se expresa diciendo: que dos planos distintos no pueden tener más de dos puntos comunes fuera de una recta; o que si M, N y P son tres puntos del plano ABC, los dos planos MNP y ABC son uno mismo.

·4. *Recta con dos puntos en un plano. Si una recta tiene dos puntos en un plano tiene todos sus puntos en dicho plano.*

Supongamos, en efecto, que una recta tiene dos puntos A y B en un plano α. Tomando en el plano α, otro punto C que no esté en la recta AB, esos tres puntos, A, B y C, determinan un plano ABC, que no puede ser otro que el α; mas por definición de plano ABC, éste contiene a todos los puntos de la recta AB, luego todos los puntos de esta recta están en α. Se expresa diciendo que AB está en α, o que α pasa por la recta AB.

·5. *Otras determinaciones del plano. Una recta y un punto fuera, o dos rectas que se cortan, determinan un plano.*

En efecto, dada una recta *a*, y un punto fuera C, tomando en la recta *a*, dos puntos A y B, por los tres puntos A, B y C pasa un plano, que contendrá al punto C y a la recta *a*. Y por esta recta *a*, y ese punto C, no puede pasar otro plano, pues por los tres puntos A, B y C no pasa más que uno.

Asímismo, dadas dos rectas, *a*, *b*, que se cortan en un punto C, tomando un punto A, de *a*, y otro punto B, de *b*, por los tres puntos A, B y C pasa un plano, que pasará por *a* y *b*, y sólo pasa uno.

8. División del plano por una recta.

·1. *Definición.* Dada una recta *p* situada por un plano α (fig. 12), cada dos puntos A y B que estén en α, y fuera de la recta *p*, se dice que están en la misma región, o del mismo lado, respecto a la recta *p*, cuando el segmento AB no corta a esta recta; y otros dos puntos A y C, se dice que están en distinta región, cuando el segmento AC corta a la recta *p*.

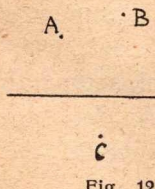


Fig. 12

Decir que el segmento AC corta a la recta, quiere decir que en el segmento existe un punto de la recta, el cual será interior a AC.

En la figura se observa que por estar A y B en la misma región, y estar A y C en distinta región, también B y C estarán en distinta región; es decir, el segmento BC corta a la recta *p*.

Pero esto no se puede demostrar, y hay que postularlo.

·2. *Postulado sobre la división del plano. Si dos puntos A y B de un plano están en una misma región respecto de una recta* p *del mismo, y otro punto C, del plano, está en distinta región que A, también C está en distinta región que B.*

·3. *De esto se deduce que toda recta* p *de un plano le divide en dos partes, llamadas semiplanos, que no tienen común más que la recta* p, formada la una, por los puntos de *p*, el punto A, y todos los que están en la misma región que A respecto de la recta *p;* y formada la otra por los puntos de *p*, y todos los que están en distinta región que A, respecto de *p*

Veamos una aplicación inmediata de esta división del plano.

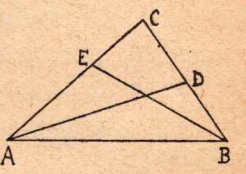


Fig. 13

·4. Dados tres puntos A, B y C que no están en línea recta, tomemos un punto D, interior al segmento BC (fig. 13), y otro punto E, interior al segmento AC; entonces, *los segmentos AD y BE se cortan.*

Pues respecto de la recta BE, los puntos A y D están en distinta región, ya que A y C están en distinta región, y C y D están en la misma; resulta, pues, que el segmento AD, corta a la recta BE. Igual se demuestra que el segmento BE corta a la recta AD, luego los dos segmentos AD y BE se cortan en un punto interior a ambos.

·5. Recíprocamente: dados tres puntos A, B y C que no están en línea recta (fig. 14), tomemos un punto D interior al segmento BC, y tomemos un punto F, interior al segmento AD, entonces, *la prolongación del segmento* BF, *por* F, *corta al segmento* AC.

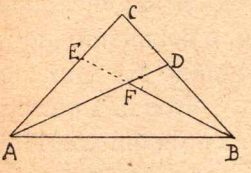


Fig. 14

Pues respecto de la recta BF, los dos puntos A y C están en distinta región, ya que A y D están en distinta región, y D y C están en la misma; luego el segmento AC corta a la recta BF, en un punto que podemos llamar E. Y estará F dentro del segmento BE, porque según el teorema anterior los dos segmentos AD y BE se cortan, en un punto que no puede ser otro que el F, interior a ambos.

·6. *Trilátero.* Para abreviar el lenguaje, siempre que tengamos tres puntos que no están en línea recta, como los A, B y C de las dos figuras anteriores, a la figura que forman los puntos del segmento AB, mas los del segmento BC, mas los del segmento CA, la llamaremos *trilátero*, que quiere decir, tres lados. A dichos segmentos se les llama lados, y a los puntos A, B, C, vértices. A, se dice opuesto a BC.

9. División del plano por tres rectas

·1. Supongamos en un plano tres puntos A, B y C no alineados. *Las tres rectas* AB, AC, BC *dividen al plano en siete regiones, que no tienen puntos comunes, fuera de las rectas* (fig. 15).

En efecto, el plano está formado por los puntos pertenecientes a las rectas que pasan por cada vértice del trilátero ABC y por cada punto del lado opuesto (7 ·2 ·3).

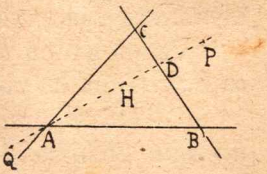


Fig. 15

Las rectas que unen el vértice A con los puntos de BC, quedan divididas en tres partes cada una, que son un segmento, tal

como el AD, y dos semirectas; los segmentos forman una región que se llama triángulo ABC, y las semirectas forman dos regiones que se llaman prolongaciones del triángulo, la una por el vértice A, y la otra por el lado BC.

Asímismo, las rectas que pasan por B, y por los puntos del segmento AC, forman otras tres regiones, pero el triángulo BAC coincide con el ABC, según propiedades anteriores (8 ·4 ·5); luego resultan dos nuevas regiones. Y las rectas que pasan por C y los puntos de AB suministran otras dos nuevas regiones.

En total resultan siete regiones, que son, un triángulo, sus tres prolongaciones por los vértices y sus tres prolongaciones por los lados.

Y es claro que esas regiones no tienen puntos interiores comunes, porque las rectas que definen el plano se cortan, precisamente, en algún punto del triángulo (8 ·5) y no podrán cortarse fuera.

Los puntos del triángulo ABC, que no pertenecen al trilátero ABC, se dice que son *interiores* al triángulo o al trilátero; los puntos del triángulo, que están en el trilátero, o sea en alguno de los segmentos AB, BC, CA, se dice que están en el *contorno* del triángulo; y los puntos de las prolongaciones del triángulo, que no están en el trilátero, se dice que son *exteriores* al triángulo o al trilátero.

·2. *Los puntos del triángulo* ABC *son puntos comunes a los tres semiplanos determinados por cada vértice, y la recta que contiene al lado opuesto.*

Pues uniendo un punto cualquiera, tal como el H, interior al triángulo, con un vértice, tal como el A, el segmento AH no corta al lado BC (8 ·5), lo que prueba que H está en la misma región que A respecto al lado opuesto BC (8 ·1).

·3. *Los puntos pertenecientes a la prolongación del triángulo por uno de sus lados están, respecto a ese lado, en distinto semiplano que el vértice opuesto; y en el mismo semiplano que los otros dos vértices, respecto de sus lados opuestos.* Tal ocurre al punto P.·

Pues el segmento PH corta al lado CB, y no corta a los otros lados, lo que prueba que P y H están en distinta región respecto CB, y en la misma respecto de los otros dos lados, luego P y A están en distinta región res-

pecto BC, y P está en la misma región que los otros vértices, B o C, respecto de sus lados opuestos (8 ·2).

·4. *Los puntos pertenecientes a la prolongación del triángulo por uno de sus vértices, están en la misma región que este vértice, respecto del lado opuesto y en distinta región que los otros vértices respecto de sus lados opuestos* Tal ocurre al punto C.

Pues el segmento HQ no corta a la recta BC, y sí corta a las rectas AB y AC.

·5. *Se deduce de aquí, que de todas las semirrectas o rayos, del plano, que parten de* A, *solamente los rayos que pasan por algún punto del segmento* BC, *tal como el* D, *tienen sus puntos en la misma región que* C *respecto de* AC *y en la misma región que* B *respecto de* AC.

Pues esos rayos tienen sus puntos, o en el triángulo ABC, o en su prolongación por el lado BC. Y en cambio, los demás rayos del plano, que parten de A, tienen que tener los demás puntos en regiones distintas de esas dos.

10. División del plano por dos rectas que se cortan

·1. *Dos rectas que se cortan dividen al plano en cuatro regiones, llamadas regiones angulares, que no tienen puntos comunes fuera de las rectas.*

En efecto: dadas dos rectas *p*, *q*, que se cortan en un punto O (fig. 16), tomemos en la *p* dos puntos A y C separados por O; tomemos en la *q* otros dos puntos B y D, separados por O, y tracemos los segmentos AB, BC, CD y DA. Consideremos los rayos que parten de O y pasan por algún punto del segmento AB; los puntos de todos esos rayos forman una de las regiones angulares que

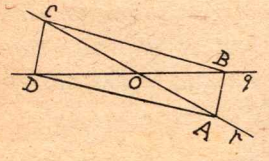


Fig. 16

podemos llamar región AOB. Los otros tres segmentos nos dan las otras tres regiones.

Para demostrar que todo punto del plano, que no pertenece a las rectas *p*, *q* está en una de las cuatro regiones y solo en una, basta observar que la recta *p* divide al plano en dos semiplanos, que podemos llamar Bp y Dp; y la recta *q* en otros dos, Aq y Cq. Pero todo punto del plano que no esté en *p* o *q*, tiene que estar en uno solo de los primeros, y en uno solo de los segundos, luego tiene que estar: o en Bp y Aq, y por consiguiente, en la región AOB y sólo en ésta (9 ·5); o en Bp y Cq, o sea en la región angular BOC; o en Dp y Cq, o sea en COD; o por fin en Dp y Aq, o sea en AOD; es decir, en una región y solo en una.

11. Elementos geométricos; figuras geométricas

·1. *Se llaman elementos geométricos al punto, la recta y el plano.*

·2. *Figura geométrica es todo conjunto de elementos geométricos, o de partes de ellos.* Como la recta y el plano son conjuntos de puntos, en realidad, todas las figuras se componen de puntos.

·3. Las figuras geométricas se clasifican en *categorías*. Dejando para más adelante, cuando estudiemos la Geometría del espacio, las figuras cuyos puntos no están todos en un plano, debemos por ahora considerar figuras de dos categorías, a saber:

La *serie rectilínea*, que es el conjunto de todos los puntos de una recta, llamada *base* de la serie; y el *haz de rectas*, que es el conjunto de todas las rectas que están en un plano y pasan por un punto, llamado *vértice* del haz. Ambas se llaman figuras de primera categoría, como también se llaman así a la formada por varios puntos de una serie, o por varias rectas de un haz. Suponiendo cada recta de un haz dividida por el vértice en dos semirrectas o rayos, tendremos el *haz de rayos*, que es la figura formada por todos los rayos que parten de un punto y están en un plano.

Y se llaman figuras de *segunda categoría*, las figuras *planas*, o sea conjuntos de puntos o rectas que están todas en un plano, y no pertenecen a una figura de primera categoría.

Ejercicios

Enunciar diferentes figuras de primera y segunda categoría.

Geometría plana

LECCIÓN 3.ª

IGUALDAD DE SEGMENTOS

12. Primeras propiedades métricas

Los postulados establecidos en la lección primera son el fundamento de las propiedades gráficas de los segmentos; vamos ahora a estudiar las propiedades métricas, comenzando por un nuevo grupo de postulados, que se refieren a un nuevo concepto primitivo, el de igualdad de segmentos.

·1. *Postulado sobre la relación de igualdad entre segmentos. Existe para los segmentos una relación, según la cual dos segmentos cualesquiera verifican necesariamente una sola de estas dos cosas: o son iguales o desiguales.*

En este postulado va incluído un nuevo concepto primitivo, el de *segmentos iguales,* que no podemos definir. Para saber a qué noción intuitiva nos referimos, recurriremos a la experiencia, materializando los segmentos por medio de *reglas*, o de *hilos tirantes;* entonces, dos de esos segmentos se dicen iguales, cuando *superpuestos coinciden*, es decir, llegan a tener los mismos extremos; y son desiguales cuando no pueden coincidir.

Cuando se trata de vectores, es decir de segmentos de una misma recta, en los cuales se considera el *sentido* (4 ·1), cabe distinguir dos clases de igualdad, *directa* e *inversa;* diciéndose que dos vectores son iguales directamente, o sea *directamente iguales*, cuando además de ser iguales tienen el mismo sentido, y que son *inversamente iguales*, cuando son iguales pero de sentido contrario.

·2. *Postulado sobre las propiedades características de la igualdad. La igualdad de segmentos verifica las tres propiedades características de toda equivalencia, a saber:*

Propiedad reflexiva: todo segmento es igual a sí mismo.

Propiedad simétrica: si un segmento es igual a otro, éste es igual al primero.

Propiedad transitiva: si un segmento es igual a otro, y éste es igual a un tercero, el primero es igual al tercero. Lo cual se puede expresar también (teniendo en cuenta la propiedad simétrica): *dos segmentos iguales a un tercero son iguales entre sí.*

Como el segmento AB, o sea el segmento cuyas extremidades son los puntos A y B, es el mismo segmento que el BA, resulta que la propiedad reflexiva nos dice que el segmento AB es igual al AB y también al BA. Pero si tenemos en cuenta el sentido, debemos decir: el vector $\overline{AB}$ es directamente igual al $\overline{AB}$, e inversamente igual al $\overline{BA}$.

La existencia de segmentos iguales a uno dado, distintos de él mismo, se deduce de este postulado:

·3. *Postulado sobre segmentos iguales a uno dado. Dado un segmento* AB, *existe en toda semirrecta, a partir de su origen* O, *un segmento* OP, *igual al* AB, (fig. 17).

Y la existencia de segmentos desiguales a uno dado se deduce de este otro:

Fig. 17

·4. *Postulado sobre segmentos desiguales. Todo segmento es desigual a cualquiera de sus partes.* Se deduce de aquí, que sobre toda semirrecta no puede haber, a partir del origen, más que un segmento OP, igual a otro dado AB. Pues cualquier otro segmento de la semirrecta que tomemos a partir de O, o es una parte del OP, o éste es una parte de él; y en ambos casos es desigual al OP, luego no puede ser igual al AB.

Estos postulados nos permiten definir una clase de valores que les llamaremos longitudes.

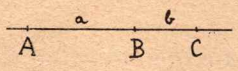
·5. *Definición de longitud. Se llama longitud de un seg-*

mento al ente o propiedad común a ese segmento y a todos los que son iguales a él, y que es distinta para los desiguales.

La longitud de un segmento se llama también *distancia* entre sus extremidades. Si una longitud *a* es igual a otra *b*, se escribe $a = b$.

13. Adición de segmentos y de longitudes

·1. Si tenemos tres puntos en una recta, el A, el B y el C, (fig. 18), tales que el B es interior al segmento que forman los otros dos, los segmentos AB y BC se dicen *consecutivos*, y al AC se le llama *suma* de ellos.



(Fig. 18)

Se designa así : $AB + BC = AC$.

Y se llama suma de dos segmentos cualesquiera a la suma de otros dos segmentos consecutivos respectivamente iguales a ellos.

Si los segmentos que se suman tienen longitudes *a* y *b*, el segmento suma tiene una longitud que se llama suma de las *a* y *b*, y se designa $a + b$. Para considerar a esta expresión como una longitud determinada, necesitamos otro postulado.

·2. *Postulado sobre la suma de segmentos. Si dos segmentos son respectivamente iguales a otros dos, la suma de los primeros es igual a la suma de los segundos.*

Ahora podemos ver que la suma de longitudes tiene las tres propiedades fundamentales de la suma de números.

·3. *Propiedad uniforme. La suma de dos longitudes es otra longitud que existe siempre y está unívocamente determinada.*

Pues dadas dos longitudes, *a* y *b*, tomemos sobre una semirrecta, y a partir del origen O, un segmento de longitud *a* (12 ·3), y a continuación otro de longitud *b;* el segmento total tendrá por longitud $a + b$, por lo cual vemos que esta suma existe siempre. Y para ver que está unívocamente determinada, basta observar, que si efectuamos la operación en otra semirrecta, nos

resultará un segmento suma, igual al que hemos obtenido la primera vez (según el postulado sobre la suma de segmentos), y por tanto, de la misma longitud.

·4. *Propiedad conmutativa*: $a + b = b + a$. Pues como se ve en la figura 18, el segmento AC tiene de longitud $(a + b)$ y el CA, $(b + a)$, y ambos segmentos son iguales (**12** ·2).

·5. *Propiedad asociativa*: $(a + b) + c = a + (b + c)$. Pues como se ve en la figura 19, el primer miembro de esa igualdad representa la suma de AC y de CD, o sea el segmento AD; y el segundo miembro la suma de AB y de BD, o sea el mismo segmento AD.

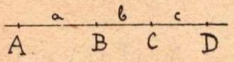


Fig. 19

·6. Definiendo como para los números la *suma de más de dos sumandos*, como el resultado de sumar los dos primeros, y el resultado con el tercero, y el resultado con el cuarto, y así sucesivamente, se pueden extender las propiedades anteriores a la suma de varios sumandos, lo mismo que en Aritmética, y someter de esta manera a las longitudes al mismo Algoritmo de la adición que para los números.

14. El principio de comparación entre las longitudes

·1. *Longitudes mayores y menores que otras.* Una longitud se dice que es *mayor* que otra, cuando es igual a esta otra más una tercera longitud. Es decir *a* es mayor que *b*, siempre que sea:

$a = b +$ otra longitud. Se designa $a > b$; y también se dice *b menor* que *a*, designándose $b < a$.

·2. *Principio de comparación. Dadas dos longitudes* a *y* b *se verifica necesariamente una sola de estas tres cosas:*

$$\text{o es } a < b, \text{ o es } a = b, \text{ o es } a > b$$

Pues tomando a partir del origen de una semirrecta, dos segmentos de longitudes *a* y *b*, o coinciden, o el uno resulta parte del otro, o éste resulta parte del primero. Y no puede ser que al mismo tiempo sea *a* igual a *b*, y mayor o menor que *b*, porque un segmento no puede ser igual a ninguna de

s partes (12 ·4); ni puede ser al mismo tiempo *a* mayor y menor que *b*, porque habría otras dos longitudes *d* y *d'* tales que sería a = b + d » b = a + d', de donde se deduciría a = a + (d' + d) es decir, *a* menor que *a*, lo cual acabamos de decir que no puede ser.

·3. Definido el concepto de mayor y menor como para los números abstractos, y verificándose el principio de comparación, se extenderán a las *desigualdades* entre longitudes las propiedades generales de la desigualdad, estudiadas en Aritmética.

15. Sustracción de segmentos y longitudes

·1. Si la longitud *a* es mayor que la *b*, la diferencia (a - b) se define, análogamente que en la Aritmética, como la longitud que sumada con *b*, dé *a*.

Esa diferencia está determinada, porque si llamamos *c* y *c'* a dos longitudes que cumplan la condición a = b + c = b + c' la *c* tendrá que ser igual a la *c'*, pues si no tendría que ser mayor o menor, por ejemplo, mayor, y existiría otra longitud tal que se tendría c = c' + d de donde b + c' + d = b + c' lo cual no puede ser (12 ·4).

·2. Lo mismo que en Aritmética, cuando es a = b, la expresión (a − b) representa un nuevo ente que se llama *longitud nula*, que se considera como distancia de un punto a sí mismo. Se designa, 0.

Y si es a < b o sea b = a + c la expresión (a - b) representa otro nuevo ente que se llama *longitud negativa*, y se designa, — c.

Prescindiendo, por tanto, de la representación geométrica, se puede estudiar la teoría de las longitudes positivas y negativas, en la misma forma que se hace en Aritmética para los números, llegando a conclusiones análogas Pero a las longitudes relativas se les puede dar un significado geométrico, considerando los dos sentidos de la recta (4), como veremos enseguida.

·3. *Sustracción de segmentos.* Para restar de un segmento otro menor, basta tomar sobre una recta un segmento OM, igual al minuendo, y a partir de M, y en la semirrecta MO, otro segmento MN igual al sustraendo (figura 20); el segmento ON así formado, es un segmento que sumado con el sustraendo nos da el minuendo, luego es la diferencia buscada: $OM - NM = ON$

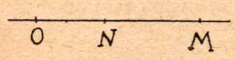


Fig. 20

·4. *Adición y sustracción de vectores.* Supongamos ahora un eje, es decir, una recta en la cual se ha elegido un sentido (4 ·19); puede ser, por ejemplo, la recta de la figura 21, en la cual se ha elegido el sentido según el cual el punto O precede al M. Entonces, todos los vectores tales como los $\overline{OM}$, $\overline{MN}$, $\overline{ON}$, etc., cuyos orígenes preceden a los extremos, se les suele llamar *positivos*, y se les asigna una longitud que es la de los respectivos segmentos. Y a los vectores, tales como $\overline{MO}$, $\overline{NM}$, $\overline{NO}$, etc., cuyos orígenes siguen a los respectivos extremos, se les suele llamar *negativos*, y se les asigna una longitud, que es igual en valor absoluto a la longitud de los respectivos segmentos, pero con el signo (—), es decir como negativas.

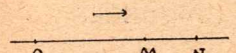


Fig. 21

Entonces podemos llamar *suma de dos vectores* situados sobre un eje *al vector cuya longitud es suma de las longitudes de aquéllos.* Y teniendo en cuenta las reglas para sumar números o longitudes de distintos signos o del mismo signo, se deducen las siguientes fórmulas referentes a la figura 21:

Suma de vectores positivos: $\overline{OM} + \overline{MN} = \overline{ON}$; ídem de negativos: $\overline{NM} + \overline{MO} = \overline{NO}$.

Suma de un positivo y un negativo: $\overline{ON} + \overline{NM} = \overline{OM}$; $\overline{NO} + \overline{OM} = \overline{NM}$.

Fórmulas que se compendian en esta regla: *Para sumar dos vectores se construyen otros iguales a ellos en magnitud y sentido, de manera que coincidan el extremo del primero y el origen del segundo; y entonces, el vector suma es el que tiene por origen el del primero, y por extremo el del segundo.*

Las propiedades de la suma y la generalización al caso de más de dos sumandos son consecuencia de la Aritmética.

Definiendo la *diferencia* de vectores como de ordinario, y recordando la sustracción de números relativos, se deduce que *para restar un vector basta sumar su opuesto*, es decir, el que tiene igual magnitud que él, pero sentido contrario. Ejemplo: $\overline{OM} - \overline{NM} = \overline{OM} + \overline{MN} = \overline{ON}$

16. Continuidad de las longitudes

Las operaciones estudiadas hasta ahora con las longitudes servirían, aunque éstas fuesen cantidades discretas, como lo son los números enteros. Veamos ahora que las longitudes forman un conjunto denso (como los números fraccionarios) y continuo (como los números reales).

·1. *Principio de densidad de las longitudes. Dadas dos longitudes desiguales existe siempre otra mayor que la menor, y menor que la mayor.* Pues si las longitudes desiguales son *a* y *b*, siendo por ejemplo, a > b, llevando sobre una recta, a partir del origen O (figura 22), dos segmentos de longitudes *a* y *b*, resultará que entre los extremos de esos segmentos hay siempre otro punto (1 ·3), que es extremo de un segmento de longitud *c*, tal que es a < c < b, lo que demuestra el teorema.

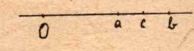


Fig. 22

·2. *Principio de continuidad de las longitudes. Si las longitudes se clasifican de cualquier manera en dos clases, tales que, toda longitud de la primera clase sea menor que toda longitud de la segunda, y toda longitud pertenezca a una de las dos clases, existe una longitud de separación, que puede pertenecer a la primera o a la segunda clase, pero tal, que las menores que ella pertenecen a la primera clase y las mayores, a la segunda.*

Pues suponiendo que las longitudes se toman en una recta

a partir de un punto fijo O, el postulado de continuidad de la recta (6 ·1), demuestra el de las longitudes.

·3. *Clases contiguas.* Hay muchas magnitudes en Geometría que se definen por medio de clases contiguas. Cuando se trata de longitudes, se llaman *clases contiguas* a dos clases de longitudes, tales que: toda longitud de la primera clase es menor que toda longitud de la segunda; y

dada una longitud positiva tan pequeña como se quiera, existe siempre una longitud de la primera clase y otra de la segunda, que se diferencian en menos de esa longitud dada.

Por razones de brevedad nos contentamos con enunciar la siguiente proposición, que es una consecuencia del principio de continuidad:

Dadas dos clases contiguas de longitudes, existe siempre una longitud de separación que no es inferior a ninguna de la primera clase, ni superior a ninguna de la segunda.

17. Multiplicación de una longitud o segmento por un número

·1. Si *a* es una longitud y *n* es un número natural, el producto de *a* por *n* se define como de ordinario por la fórmula:

$$a \,.\, n = a + a + a + \ldots\ldots + a \quad \text{y} \quad a \,.\, 1 = a$$

y lo mismo el producto de un segmento por *n*.

·2. Se demuestran como en aritmética las siguientes propiedades de la multiplicación natural:

Propiedad uniforme: el productor $a \,.\, n$ existe y está determinado unívocamente (13 ·3).

Propiedad distributiva respecto del multiplicando:

$$(a + b) \,.\, n = a \,.\, n + b \,.\, n$$

Idem respecto del multiplicador:

$$a \,.\, (m + n) = a \,.\, m + a \,.\, n$$

Propiedad conmutativa : $(a \cdot m) \cdot n = (a \cdot n) \cdot m$

Propiedad asociativa : $(a \cdot m) \cdot n = a \cdot (m \cdot n)$

·3. Razonando como en Aritmética, los productos por 0 y por un número negativo se definen así :

$$a \cdot o = o \quad » \quad a \cdot (-n) = -(a \cdot n)$$

·4. *Proposición de Arquímides. Si* a *y* b *son dos longitudes absolutas desiguales, existe un múltiplo de la menor, que excede a la mayor.* Es decir, hay un número *n* tal que :

$$a \cdot n > b, \quad y \quad b \cdot n > a$$

Se demuestra fundándose en el principio de continuidad (**16** ·2); por razones de brevedad no hacemos más que enunciarlo. Enseguida veremos la aplicación que tiene a la medida de longitudes.

18. División de una longitud o segmento por un número

·1. Si *a* es una longitud y *n* un número natural, el cociente *a*/*n* se define como en Aritmética por la condición $(a/n) \cdot n = a$, o lo que es igual, por la condición $\frac{a}{n} + \frac{a}{n} + \frac{a}{n} + \overset{n}{\ldots} + \frac{a}{n} = a$.

Lo mismo se define el cociente de un segmento por un número natural *n*; por tanto, si un segmento se divide en *n* partes iguales, una de estas partes es el cociente de dividir el segmento por *n*, y se llama también n-sima parte del segmento.

La existencia de la n-sima parte de un segmento o longitud está fundada en el principio siguiente :

·2. *Principio sobre la divisibilidad del segmento. Todo segmento se puede dividir en* n *partes iguales, cualquiera que sea el número natural* n.

Este principio es una consecuencia de la proposición de Arquímides (**17** ·4) y del postulado de continuidad (**6** ·2). No lo demostramos por razón de brevedad.

De él se deduce, que dada una longitud cualquiera *a*, y un número natural *n*, existe el cociente *a*/*n*.

Este cociente está determinado, porque al aumentar o disminuir el primer factor del producto $(a/n) \cdot n$, ese producto varía, según la propiedad distributiva de la multiplicación (17 ·2).

·3. Se demuestra como en Aritmética que se verifican las siguientes propiedades, supuesto que *a*, *b* y *c* son longitudes y *m*, *n* números naturales :

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n} - \frac{c}{n} = \frac{a+b-c}{n} \quad » \quad \frac{a}{n} \times m = \frac{a \times m}{n} \quad » \quad \frac{a/n}{m} = \frac{a}{m \cdot n}$$

19. Razón de los segmentos

Supongamos dos segmentos cuyas longitudes son *a* y *b*. Para hallar lo que se llama razón entre *a* y *b*, consideremos las magnitudes :

$$b, \frac{b}{2}, \frac{b}{3}, \frac{b}{4}, \ldots\ldots, \frac{b}{n}, \ldots\ldots$$

Pueden suceder tres casos :

·1. *Que* a *sea múltiplo de* b, es decir, que la contenga un número exacto de veces, que llamamos *m*. Se tendrá : $a = b \cdot m$; y a ese número *m* se le llama razón entre *a* y *b*, escribiéndose en esta forma : $\frac{a}{b} = m$. Luego, *si un segmento es múltiplo de otro, se llama razón entre los dos segmentos al número de veces que el primero contiene al segundo.*

Se puede ver que este número está determinado, pues al ser $b \cdot m = b \cdot m'$ tendrá que ser $m = m'$, ya que una longitud no puede ser igual a una de sus partes (12 ·4).

·2. Puede ocurrir que *a* no sea múltipla de *b*, pero sí lo sea de una de sus partes alícuotas: por ejemplo, que contenga *m* veces a la *n*-sima parte de la *b*. Será entonces $a = \frac{b}{n} \times m = \frac{b \times m}{n}$; o multiplicando por *n* será : $a \times n = b \times m$; o en fin, $\frac{a}{m} = \frac{b}{n}$.

Al número fraccionario $\frac{m}{n}$ *se le llama entonces razón entre* a *y* b *y se escribe* $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$ » $a = b \times \frac{m}{n}$.

También se puede ver que este número está determinado, pues de ser $b \cdot \frac{m}{n} = b \cdot \frac{p}{q}$ se deduce $b \cdot (m\,q) = b \cdot (p\,n) \;»\; m\,q = p\,n \;»\; \frac{m}{n} = \frac{p}{q}$.

Tanto en el primer caso como en el segundo, las longitudes se llaman *conmensurables*, porque admiten una medida común, es decir, una longitud que está contenida un número exacto de veces en las dos, y es la magnitud $\frac{b}{n}$ o su igual $\frac{a}{m}$, en el 2.º caso.

·3. Puede suceder, en fin, que *a* no sea múltipla de *b*, ni de ninguna de sus partes alícuotas. Las longitudes o segmentos se dicen entonces *inconmensurables*. Se deduce de la proposición de Arquímedes (**17** ·4), que para cada valor de *n* existen dos múltiplos consecutivos de $\frac{b}{n}$ que comprenden a la longitud *a*, puesto que ésta llega a ser excedida por algún múltiplo de $\frac{b}{n}$; luego para cada valor de *n* habrá un número determinado *m*, que verifique :

$$b \cdot \frac{m}{n} < a < b \cdot \frac{m+1}{n}$$

Aunque no lo demostremos por brevedad, se puede ver que cualquier valor de $\frac{m}{n}$ es menor que cualquier valor de $\frac{m+1}{n}$; y como la diferencia $\frac{m+1}{n} - \frac{m}{n} = \frac{1}{n}$ acaba por ser menor que cualquier número dado, al crecer *n*, se demuestra en Aritmética que existe un número real determinado, *r*, que es límite común de $\frac{m}{n}$ y $\frac{m+1}{n}$ verificando para todo valor de *n* las condiciones $\frac{m}{n} < r < \frac{m+1}{n}$, por lo cual se llaman $\frac{m}{n}$ y $\frac{m+1}{n}$, valores aproximados por defecto y por exceso de *r* en menos de $\frac{1}{n}$. Y será: $r = \lim \frac{m}{n} = \lim \frac{m+1}{n}$.

A este número r *es al que se llama razón entre las longitudes* a *y* b, *o entre los segmentos que tienen esas longitudes, escribiéndose* $\frac{a}{b} = r \;»\; a = b \times r = b \times \lim \frac{m}{n}$.

En este tercer caso, el *r* se llama número *inconmensurable* o *irracional*.

20. Medida de un segmento

·1. *Medir un segmento o longitud, con otro segmento o longitud que se toma por unidad, significa hallar la razón del primero al segundo.* Es decir, que la medida de la longitud *a* con la *b* es por definición el número abstracto que expresa la razón entre *a* y *b*.

De aquí se deduce que dada una longitud *b*, como unidad, a toda longitud *a* le corresponde un número real, que es el que expresa su medida Y se puede demostrar, fundándose en el principio sobre las clases contiguas (**16** · 3), que a todo número real le corresponde una longitud determinada, cuya medida es ese número real.

·2. Para medir *a* con la unidad *b*, habrá pues que dividir *a* por *b*, y las sucesivas partes alícuotas, hasta llegar a una división exacta, o tan aproximada como se quiera. Cuando es exacta, el cociente exacto da la medida, y cuando es aproximada, los cocientes por defecto y por exceso dan las medidas aproximadas; todo en la forma que hemos detallado al hablar de la razón entre *a* y *b;* entendiendo por cociente de dividir *a* por *b*, el número de veces que *a* contiene a *b*, por cociente aproximado por defecto el número máximo de veces que *a* contiene a *b*; y por cociente por exceso el por defecto aumentado en unidad, como se explica en Aritmética.

·3. En la práctica es más corriente considerar sólo las partes alícuotas *decimales* de la unidad de medida; es decir, las cantidades

$$b \quad , \quad \frac{b}{10} \quad , \quad \frac{b}{100} \quad , \ldots\ldots \quad \frac{b}{10^n} \quad , \ldots\ldots$$

y entonces, para medir *a* con la unidad *b*, se dividen, obteniéndose un cociente entero, *e*, y un resto, que dividido por $\frac{b}{10}$ nos da un cociente entero c_1 y un resto, que dividido por $\frac{b}{100}$

nos da un cociente entero c_1 y un resto,... y así sucesivamente. Suponiendo que la operación se prosigue indefinidamente, el decimal indefinido: $e, c_1 c_2 \ldots c_n \ldots\ldots$ es el que expresa la medida de *a* por *b*.

Y así, para medir las longitudes se ha convenido en tomar por unidad principal el *metro* (m), que es aproximadamente la diezmillonésima parte del cuadrante de meridiano terrestre que pasa por París, y exactamente la longitud de una barra de platino iridiado que se conserva en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas.

Y para medir una longitud con el metro, se verá el número máximo de metros que contiene: el resto se mide con la décima de metro, o sea con el *decímetro;* el resto con el *centímetro*, etc.

21. Cálculo de los resultados de operaciones con longitudes

Las operaciones con longitudes se pueden efectuar también midiéndolas con una unidad común y operando con los números de medida. Y así, por ejemplo, si las longitudes *a* y *b* las medimos con el metro y nos resultan respectivamente los números 6 y 4 será:

$$a = 6\text{ m} \;»\; b = 4\text{ m} \;»\; a + b = 6\text{ m} + 4\text{ m} = (6 + 4)\text{ m} = 10\text{ m}$$

$$a - b = 6\text{ m} - 4\text{ m} = (6 - 4)\text{ m} = 2\text{ m} \;»\; a \,.\, 5 = (6\text{ m}) \,.\, 5$$

$$= (6 \,.\, 5)\text{ m} = 30\text{ m}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{6\text{ m}}{4\text{ m}} = \frac{6}{4} = 1\,'\,5 \;»$$

igualdades que son consecuencia de las definiciones y propiedades estudiadas anteriormente, según se detalla en Aritmética.

De un modo general, como elegida la unidad de medida, existe correspondencia biunívoca entre las longitudes y los números reales, todo el cálculo numérico se podrá extender a las longitudes, incluso el cálculo de *límites*. En particular nos in-

teresa poner de manifiesto, por sus aplicaciones, que si a_n y b_n representan magnitudes variables tales que todo valor a_p de la primera es menor que todo valor b_q de la segunda, y la diferencia $a_n - b_n$ acaba por ser menor que cualquier magnitud dada, es decir, es infinitésima, las dos magnitudes tienen límite, el mismo para las dos.

Y es claro, que si de antemano sabemos que existe otra magnitud c, comprendida entre ambas $a_n < c < b_n$ para todos los valores de n, será entonces $\lim a_n = \lim b_n = c$.

Ejercicios

Dibújense dos segmentos y efectúense numérica y gráficamente las operaciones de suma, resta, multiplicación por un número y división por un número y división de los dos segmentos.

Efectuar sumas y restas de vectores en diversos casos.

LECCIÓN 4.ª

ANGULOS PLANOS

22. El concepto de ángulo

·1. *Ángulos convexos. Dados dos rayos, o semirrectas, que parten de un mismo punto* O (fig. 23), *y que no están en la misma recta, tomemos dos puntos* A y B, *situados uno en cada rayo; la figura formada por todos los rayos que parten de* O *y que pasan por algún punto del segmento* AB, *se llama ángulo convexo* ABO *o* BOA.

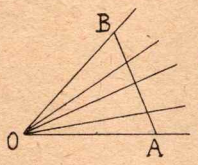


Fig. 25

Los rayos OA y OB se llaman los *lados* del ángulo, y el punto O, vértice. Los demás rayos del ángulo, que no son lados, se dicen *interiores* al ángulo.

Si prolongamos los rayos OA y OB, por O, las rectas completas que se forman dividen al plano en cuatro regiones angulares (10), y una de ellas está formada precisamente por los puntos pertenecientes a los rayos que parten de O y pasan por algún punto del segmento AB. Esto nos dice que el ángulo convexo AOB, que acabamos de definir, es el mismo, cualquiera que sea el segmento AB que se tome para determinarlo.

·2. *Angulos cóncavos.* Dados dos rayos OA y OB que parten de un mismo punto O (fig. 24), y que no están en la misma recta, la figura formada por todos los rayos del plano AOB que parten de O, excepto los que son interiores al ángulo convexo, formado por aquellos dos rayos, se llama *ángulo cóncavo* AOB.

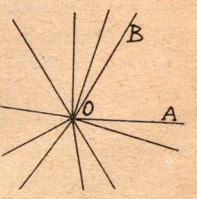


Fig. 24

Los rayos dados se llaman *lados*, y el punto O, *vértice*. Los demás rayos del ángulo cóncavo, que no son lados, se dicen *interiores*.

Si los lados del ángulo cóncavo los prolongamos por el vértice, ese ángulo cóncavo queda descompuesto en tres ángulos convexos, correspondientes a las tres regiones angulares, que con la del ángulo convexo forman las cuatro en que queda descompuesto el plano.

·3. *Angulos llanos.* Dadas dos semirrectas, OA y OB, que parten de un mismo punto O (fig. 26), y que están en prolongación, o sea formando una recta *p*, la figura formada por todas las semirrectas o rayos que parten de O y están en un mismo semiplano respecto de *p*, se llama *ángulo llano*, AOB.

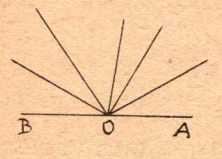


Fig. 25

Los rayos dados se llaman *lados*, y el punto O, *vértice*. Los demás rayos que forman el ángulo, y que no son lados, se dicen interiores.

Todo rayo interior a un ángulo llano le divide en dos ángulos convexos, correspondientes a los de las regiones angulares en que el plano queda dividido por ese rayo prolongado y por la recta que forman los lados.

·4. *Definición general de ángulo.* Las tres clases de ángulos que acabamos de definir pueden comprenderse en una definición general que dice: *ángulo es cada una de las dos partes en que un haz de rayos es dividido por dos rayos del mismo haz.*

La división del haz por dos rayos del mismo queda determinada de la siguiente manera: Supongamos un haz de vértice O (fig. 26); en el plano del haz tracemos dos rectas *p* y *q* que pasen por O, y tomemos en *p* dos puntos A y C, separados por O, y en *q* otros dos, B y D. Los segmentos AB, BC; CD, DA, forman un contorno cuyos puntos se corresponden biunívocamente con los rayos del haz (10). Entonces, dos rayos cualesquiera del haz, tales como los OM y ON determinan en el contorno dicho, dos puntos M y N, que le dividen en dos partes, sin más puntos comunes que los M y N; y esas dos partes determinan en el haz una división en dos partes, sin más rayos comunes que los OM y ON; resultando de las propiedades sobre división del plano, que esas dos partes son los ángulos convexo y cóncavo que forman los rayos OM y ON; o si están en prolongación los dos ángulos llanos (8 a 10).

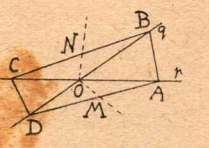


Fig. 26

23. Propiedades gráficas de los ángulos

Las propiedades gráficas de los ángulos son consecuencia de las propiedades gráficas de los segmentos, estudiadas en la lección primera, y de la división del haz por dos rayos, que acabamos de estudiar.

·1. *Todo rayo interior a un ángulo le divide en dos ángulos que son partes del primero y que no tienen común más que ese rayo.*

Pues un rayo interior al ángulo convexo MON, por ejemplo (fig. 26), divide al contorno MABN en dos partes con un solo punto común.

·2. *Dos rayos interiores a un ángulo forman otro ángulo parte del primero.* Se demuestra análogamente.

·3. *En un ángulo, o en un haz de rectas, se pueden considerar dos órdenes naturales o sentidos, opuestos uno a otro.*

Pues en el contorno MABN correspondiente al ángulo convexo MON, de la figura 26, caben dos sentidos opuestos, uno el enunciado, y otro el NBAM; y lo mismo ocurre con el contorno entero ABCDA, que determina el haz de vértice O (4).

En el ángulo puede determinarse el sentido eligiendo un rayo de él que convengamos en suponer que precede a otro, por ejemplo un lado que preceda al otro; pero bien entendido que los rayos que se consideran intermedios han de pertenecer al ángulo total. Con esta condición, *n* rayos de un ángulo no pueden colocarse mas que en dos órdenes naturales o sentidos, pues así ocurre con los *n* puntos del contorno correspondiente (3 ·4).

Pero si se trata de un haz, para determinar un sentido necesitamos dos rayos, de los cuales uno precede al otro, y además debe definirse el ángulo formado por esos dos rayos, en el cual se considera ese orden. Porque dos rayos de un haz forman dos ángulos distintos, y a ellos corresponderían dos sentidos distintos.

Por análoga razón, *n* rayos de un haz se pueden colocar

en dos órdenes naturales o sentidos, pero empezando por cualquiera de ellos, lo que no ocurre con el ángulo, ni ocurre con la recta (3 ·4).

·4. *Entre los rayos de un ángulo se verifica el principio de continuidad* (6 ·2), enunciado en forma análoga que para los puntos de una recta. Pues se verifica, por ejemplo, en el contorno MABN de la figura 26.

24. Los dos sentidos del plano

No solamente en cada haz de rayos se pueden considerar dos sentidos opuestos, sino en el plano entero.

Consideremos, en efecto, un triángulo ABC (figura 27); su contorno admite dos sentidos opuestos, uno de los cuales es el ABC, señalado en la figura.

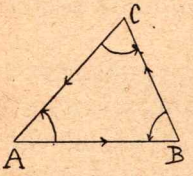


Fig. 27

Cada lado determina en el haz, cuyo vértice es el vértice opuesto a ese lado, un sentido, que es el señalado en la figura como una flecha; y se conviene en decir que los tres ángulos del triángulo, tomados en el sentido señalado por las flechas, tienen el mismo sentido.

Experimentalmente se pueden determinar los tres sentidos de los ángulos en A, B y C, imaginando en cada uno de estos puntos un reloj, y suponiendo que los ángulos se describen en sentido contrario al del movimiento de las manecillas del reloj; o imaginando un tornillo o sacacorchos en cada vértice y suponiendo que lo hacemos girar de manera que salga hacia afuera.

Resulta de esto, que en cuanto se dé en un plano el sentido de un haz, por ejemplo el de vértice A, queda determinado el sentido de los demás haces del plano, es decir, el sentido del plano entero; pues para determinar el sentido del haz de vértice B, basta suponer un triángulo que tenga por dos de sus vértices el A y el B, pudiéndose observar que el sentido es independiente del triángulo o del haz que se elija para determinarlo, aunque por brevedad no lo demostramos.

25. Primeras propiedades métricas de los ángulos

Para estudiar las propiedades métricas de los ángulos estableceremos postulados análogos a los que establecíamos para segmentos.

·1. *Postulado sobre la relación de igualdad entre ángulos. Existe para los ángulos una relación según la cual dos ángulos cualesquiera verifican necesariamente una sola de estas dos cosas: o son iguales o desiguales.*

En este postulado va incluído un nuevo concepto primitivo; el de *ángulos iguales*, que dejamos sin definir. Experimentalmente se comprueba la igualdad de dos ángulos recortando, por ejemplo, papeles que se ajusten a cada ángulo, y llevándolos a coincidir.

Cuando se trata de ángulos que están en el mismo haz, o todavía en el mismo plano, cabe distinguir la *igualdad directa* o *inversa*, siempre que en el ángulo se elija un sentido determinado, tomando por ejemplo un lado como *origen*, y el otro como *extremo*, lo cual significa que el primero se supone que precede al segundo.

Entonces, dos ángulos que sean iguales y que estén en el mismo haz o en el mismo plano, pueden ser directamente iguales, cuando además tienen el mismo sentido, o inversamente iguales cuando tienen sentido contrario (23 y 24).

Los ángulos en los que se elige un sentido, o sea los lados origen y extremo, los llamaremos *ángulos orientados*.

·2. *Postulado sobre las propiedades características de la igualdad.*

La igualdad de ángulos verifica las tres propiedades características de toda equivalencia: reflexiva, simétrica y transitiva (**12** ·2).

Se enuncian como para los segmentos.

·3. *Postulado sobre ángulos iguales a uno dado. Dado un ángulo cualquiera, existe en todo haz de rayos, a partir de*

uno cualquiera de sus rayos, y en cualquiera de los dos sentidos del haz, un rayo que forma con el primero un ángulo igual al dado.

·4. *Postulado sobre ángulos desiguales. Todo ángulo es desigual a cualquier otro ángulo que sea una parte de él.*

De este postulado y el anterior se deduce que sobre un haz, a partir de uno de sus rayos, y en un sentido determinado no hay más que un rayo que forme un ángulo igual a uno dado (**12** ·4).

Así como los postulados análogos a los anteriores, aplicados a los segmentos, nos permitían definir la longitud de un segmento, en los ángulos podremos definir igualmente la *amplitud.*

·5. *Definición de amplitud. Se llama amplitud de un ángulo el ente o propiedad común a ese ángulo y a todos los que son iguales a él.*

Si *a* es la amplitud de ángulo, y *b* la de otro igual, se escribe : $a = b$.

26. Adición de ángulos y de amplitudes

·1. Dados tres rayos de un haz, OA, OB y OC (fig. 28), si uno de ellos, por ejemplo, OB, pertenece al ángulo formado por los otros dos, sabemos que OB descompone a dicho ángulo en otros dos, que son AOB y BOC (**23** ·1), *y el primer ángulo se dice suma de los otros dos:* escribiéndose : $A\hat{O}B + B\hat{O}C = A\hat{O}C$.

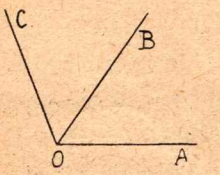


Fig. 28

A esos dos ángulos AOB y BOC se les llama *consecutivos*, llamándose así a dos ángulos que tienen el vértice y un lado común, y no teniendo ningún otro rayo que sea común.

Y se llama *suma de dos ángulos cualesquiera* a la suma de dos ángulos consecutivos que sean, respectivamente, iguales a los dados.

Para que la suma de ángulos sea posible en todos los casos, debe ampliarse el concepto de ángulo, considerando como tal a

la figura formada por todos los rayos de un haz (ángulo que se llama de un *giro*, o una vuelta), y además (considerando los rayos del haz, como dos o más rayos, superpuestos) suponer ángulos compuestos de uno o más giros y de un ángulo ordinario.

Con esta ampliación del concepto de ángulo tendrá sentido la suma de ángulos en todos los casos. Viene a corresponder esta ampliación a la noción intuitiva de considerar el ángulo como engendrado por el giro de uno de sus lados alrededor del vértice, y suponiendo que da una o varias vueltas y fracción de vuelta.

Si los ángulos que se suman tienen de amplitudes a *y* b, *el ángulo suma tiene una amplitud que se designa* a + b.

·2. *Postulado sobre la suma de ángulos. Si dos ángulos son respectivamente iguales a otros dos, la suma de los primeros es igual a la suma de los segundos.*

Esto permite demostrar las propiedades uniforme, conmutativa y asociativa de la suma de amplitudes, lo mismo que hicimos para las longitudes (15), y extender el concepto y propiedades de la suma, al caso de más de dos sumandos.

27. Amplitudes absolutas

Hay una diferencia esencial entre las amplitudes y las longitudes. Así como no hay longitudes absolutas, pues, si suponemos que todos los segmentos se reducen a la mitad, no varían en nada las formas de las figuras, existen en cambio amplitudes absolutas, pues si supusiéramos que todos los ángulos se reducen a la mitad, el ángulo llano se convertirá en un ángulo que llamaremos recto, que tiene una forma totalmente distinta.

Podemos expresar el carácter absoluto de las amplitudes por el siguiente :

·1. *Postulado sobre la igualdad de ángulos llanos. Todos los ángulos llanos son iguales.*

·2. Definiendo enseguida el concepto de *mayor* y *menor*

entre amplitudes o ángulos, lo mismo que hicimos para las longitudes (14), y demostrado el principio de comparación como allí, resultará : *que los ángulos menores que un llano son convexos y los mayores que un llano y menores que una vuelta son cóncavos* (22).

La igualdad de los ángulos de una vuelta se deduce de (26 ·2).

28. Sustracción de ángulos y de amplitudes

·1. Todo lo dicho sobre sustracción de longitudes y segmentos puede aplicarse análogamente a los ángulos y amplitudes. Y así por ejemplo, en la figura 28, que empleábamos para la suma, el ángulo AOB será la diferencia entre el AOC y el BOC, escribiéndose $A\hat{O}C - B\hat{O}C = A\hat{O}B$.

·2. Para hacer posible la sustracción en todos los casos se puede definir la amplitud *nula*, que viene a representar la del ángulo formado por un rayo consigo mismo, y las amplitudes *negativas*, susceptibles de ser interpretadas geométricamente considerando los dos sentidos de un mismo haz, o de dos haces que están en el mismo plano. La teoría se puede desarrollar como para los segmentos (15); sustituyendo la palabra longitud por la de amplitud, la palabra segmento por la de ángulo, y la palabra vector, por la de ángulo orientado, o sea ángulo en el cual se ha elegido el lado origen y el lado extremo. Se verificará, por ejemplo, entre los ángulos orientados de la figura 29, las siguientes igualdades :

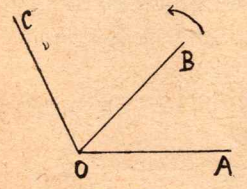


Fig. 29

$$\overline{AOC} + \overline{COB} = \overline{AOB};\quad \overline{AOC} - \overline{BOC} = \overline{AOC} + \overline{COB} = \overline{AOB}$$

que son fáciles de interpretar, teniendo en cuenta que con la notación $\overline{AOC}$ se quiere significar el ángulo que tiene por origen AO y por extremo OC, y que por tanto los dos ángulos sumados en la primera igualdad son de sentidos contra-

rios, es decir, uno negativo y otro positivo; siendo positivo el primero, en el supuesto que se tome por sentido positivo del haz, o sea del plano, el marcado en la figura con una flecha, es decir, el contrario a las agujas de un reloj.

·3. Para las amplitudes se verifican también los principios de *continuidad* y *densidad* (18), y el teorema de *clases contiguas*, pues los podemos fundar en postulados análogos a los de las longitudes.

29. Multiplicación y división de un ángulo o amplitud por un número.

·1. Esta teoría se puede desarrollar como para las longitudes (18 y 19), por lo cual si *a* es una amplitud, y *n* es un número natural, será

$$a \,.\, n = a + a + \overset{n}{\ldots} + a; \quad \left(\frac{a}{n}\right) \times n = a.$$

·2. Se verificará también la *proposición de Arquímedes* y *el principio de divisibilidad.* Según este último, todo ángulo se puede dividir en *n* partes iguales, siendo *n* un número entero cualquiera; por más que esta división no se puede hacer con la regla y el compás, de un modo exacto, más que en algunos casos, como diremos más adelante; habiéndose hecho célebre el problema de la *trisección del ángulo*, o sea el de la división de tres partes iguales, por ser uno de los irresolubles por ese procedimiento. Lo cual no obsta para que dado un ángulo cualquiera, exista siempre su tercera parte.

30. Razón de dos ángulos o amplitudes y medida de un ángulo

·1. La teoría de la *razón*, y la *medida* de amplitudes o ángulos es también susceptible de ser desarrollada como para los

segmentos. Por tanto, la razón entre dos ángulos será el número abstracto por el cual hay que multiplicar el segundo para que nos dé el primero; y la medida de un ángulo con otro que se toma por unidad será la razón entre el ángulo que se mide y esa unidad de medida.

·2. Pero sobre la elección de unidades de medida hay una diferencia esencial entre las longitudes y las amplitudes, pues no habiendo longitudes absolutas no hay ninguna longitud que pueda tomarse, desde el punto de vista teórico, con más razón que las demás como unidad de medida. En cambio, como hay amplitudes absolutas, unos ángulos pueden ser más convenientes que otros como unidades, aún desde el punto de vista teórico.

Y así, la unidad más corriente es el grado sexagesimal, que se halla dividiendo en 180 partes iguales el ángulo llano.

Es decir, que un ángulo de una vuelta o giro tendrá 360 grados sexagesimales, que se escriben: 360°. Después, cada grado se divide en 60 partes iguales, que se llaman minutos, y cada minuto en 60 partes, llamadas segundos:

$$\text{un giro} = 360^\circ;\ 1^\circ = 60';\ 1' = 60''.$$

Hoy se va extendiendo más la división *centesimal*, según la cual, la vuelta o giro se divide en 400 partes iguales, llamadas *grados centesimales*, y el grado centesimal en 100 minutos centesimales, y el minuto centesimal en 100 segundos centesimales.

$$\text{Un giro} = 400^c;\ 1^c = 100^m;\ 1^m = 100^s.$$

Más adelante hablaremos de otra unidad de ángulos, llamada *radiante*, todavía más natural que las anteriores.

31. Angulos particulares

·1 *Angulos rectos. La mitad de un ángulo llano se llama ángulo recto.* Por tanto, si en el ángulo llano AOB (fig. 30)

trazamos un rayo OC que le divida en dos partes iguales, los ángulos AOC y COB serán rectos.

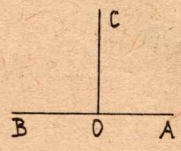


Fig. 30

Como todos los ángulos llanos son iguales, y la n-sima parte de una amplitud es otra amplitud determinada unívocamente, resultará que también *todos los ángulos rectos son iguales* (27 ·1 y 18).

·2. *Bisectriz de un ángulo. Se llama bisectriz de un ángulo el rayo que divide al ángulo en dos partes iguales.* Por ejemplo, la recta OC de la figura 30 es la bisectriz del ángulo llano AOB.

Como todo ángulo es divisible en dos partes, y la mitad de una amplitud es otra amplitud determinada unívocamente, resultará que *todo ángulo tiene una bisectriz y sólo una.*

·3. *Rectas perpendiculares.* Si dos rectas se cortan, de manera que uno de los cuatro ángulos que forman sea recto (fig. 31), los otros tres también lo serán. Pues si el ángulo *a* es recto, lo será el *b*, para que sumado con *a* nos de un llano, y lo será el *c*, para que sumado con *b* nos dé otro llano, y por fin lo será el *d*.

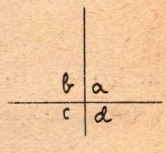


Fig. 31

Dos rectas que se cortan, formando ángulos rectos, se llaman perpendiculares. Si al cortarse no forman ángulos rectos, se llaman *oblicuas.*

·4. *Angulos agudos y obtusos. Un ángulo menor que un recto se llama agudo, y un ángulo mayor que un recto y menor que un llano, se llama obtuso.*

·5. *Angulos complementarios y suplementarios. Angulos complementarios son los que sumados dan un recto y suplementarios, si dan un llano.* Complemento o suplemento de un ángulo es su ángulo complementario o suplementario.

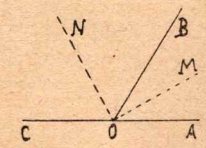


Fig. 32

·6. *Angulos adyacentes y opuestos por el vértice. Se llaman adyacentes a dos ángulos consecutivos que suman un llano. Son suplementarios.* Ejemplo. AOB y BOC. *Y sus bi-*

sectrices son perpendiculares, pues el ángulo que forman es :

$$M\hat{O}N = \frac{1}{2} A\hat{O}B + \frac{1}{2} B\hat{O}C = \frac{1}{2} (A\hat{O}B + B\hat{O}C) = \frac{1}{2} A\hat{O}C = 90^{\circ}$$

Y ángulos opuestos por el vértice son dos ángulos convexos tales que los lados del uno son prolongación de los lados del otro. Ejemplo. AOB y COD (fig. 33). *Son iguales*, porque tienen el mismo suplemento, que es el BOC *Sus bisectrices están en línea recta*. Pues los dos ángulos que forman los rayos OM y ON, o sea las bisectrices dichas, se componen de tres ángulos que son, respectivamente, iguales, a saber :

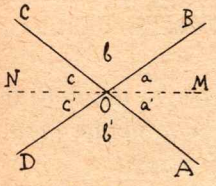


Fig. 33

$$\hat{a} = \hat{a}' \quad » \quad \hat{b} = \hat{b}' \quad » \quad \hat{c} = \hat{c}'$$

luego los dos ángulos MON serán iguales, y por consiguiente llanos, lo que prueba que OM y ON están en línea recta.

Ejercicios

Dado el ángulo de 20° 45' 52", hállese su complemento, su suplemento y su mitad, y exprésese el mismo ángulo en grados, minutos y segundos centesimales. Dibújense dos ángulos y hállense gráficamente su complemento y suplemento.

LECCIÓN 5.ª

TRIANGULOS: SU IGUALDAD

32. Elementos notables del triángulo

Dados tres puntos que no están en línea recta A, B y C (figura 34), llamábamos trilátero a la figura formada por los tres segmentos AB, BC y CA (8 ·6); y llamábamos triángulo a la figura formada por los puntos pertenecientes a los segmentos que unen uno cualquiera de los vértices del trilátero, con los puntos del lado opuesto (9). Es decir, que el triángulo está formado por los puntos de los segmentos AB, AD, AC, etc.; y de todos los demás que unen A con un punto de CB.

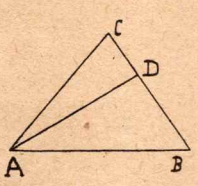


Fig. 34

También vimos que cualquiera que fuera el vértice que se elija, el triángulo es el mismo, pues los segmentos que unen A con algún punto de BC, encuentran a los que unen B con algún punto de AC, y a los que unen C con algún punto de AB (8 ·4); y recíprocamente (8 ·5).

·1. *Lados* y *ángulos*. En el triángulo ABC, los tres segmentos AB, BC y CA se llaman *lados*, y en conjunto forman el *contorno* del triángulo, o sea el trilátero ABC. La longitud del contorno se llama *perímetro*.

Los ángulos convexos formados por cada dos lados se llaman *ángulos del triángulo;* de manera que el ángulo A estará formado por todos los rayos que parten de A y pasan por algún punto del lado opuesto BC (22 ·1). A los tres puntos A, B y C, que son vértices de dichos ángulos, se les llama también *vértices del triángulo*.

Los ángulos adyacentes a los del triángulo se llaman *ángulos externos* de este triángulo; y en contraposición a éstos, los ángulos del triángulo se llaman también *internos*. Resulta de aquí que cualquier ángulo externo tendrá por lados el rayo que contiene a un lado del triángulo, y una prolongación de otro lado del mismo triángulo.

·2. *Rectas notables del triángulo*. Cada una de las tres rectas que pasan por un vértice del triángulo y el punto medio del lado opuesto se llama *mediana*. A veces se llama también mediana al segmento que une dichos puntos, o a su longitud.

Se llaman *bisectrices interiores* de un triángulo, o simplemente bisectrices, a las rectas que contienen las bisectrices de sus ángulos internos. Y *bisectrices exteriores* son las rectas formadas por las bisectrices de los ángulos externos (fig. 35). Como los dos ángulos externos que corresponden a cada vértice son opuestos por el vértice, sus bisectrices estarán en prolongación (31 ·6), luego habrá tres bisectrices exteriores; y son, respectivamente, perpendiculares a las bisectrices interiores, cada una a la que pasa por el mismo vértice, porque los ángulos adyacentes tienen sus bisectrices perpendiculares (31 ·6). A veces se llama bisectriz interior solamente al trozo de tal bisectriz limitado por el vértice del triángulo y el lado opuesto; o todavía a la longitud de este segmento.

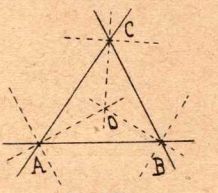


Fig 35

Se llaman *mediatrices* del triángulo las tres perpendiculares a los lados en sus puntos medios. De un modo general, mediatriz de un segmento es la perpendicular en el punto medio.

Y se llaman *alturas* del triángulo las perpendiculares a los lados, trazadas por el vértice opuesto. Como demostraremos que se puede trazar una perpendicular, y sólo una, a una recta por un punto, resultará que en un triángulo hay tres alturas, y sólo tres; y asimismo tres mediatrices, y sólo tres.

Cuando una recta es perpendicular a otra, el punto de intersección con ella se llama pie de esa perpendicular. Y algunas veces en el triángulo se entiende por altura solamente el segmen-

to de ella, comprendido entre su pie y el vértice por el que se ha trazado, o todavía la longitud de ese segmento.

33. Propiedades gráficas del triángulo

Ya sabemos que si A, B y C son tres puntos no alineados, el triángulo ABC es una de las 7 regiones en que queda dividido el plano por las rectas AB, BC, CA; precisamente la región formada por los puntos que están, respecto de cada lado, en el mismo semiplano que el vértice opuesto (9); resultando que el contorno del triángulo divide a los demás puntos del plano en dos clases : *interiores del triángulo*, que son los que pertenecen a él, sin estar en el contorno; y *exteriores al triángulo*, que son los puntos del plano que no pertenecen al triángulo. Sus propiedades se fundan en el siguiente :

·1. *Teorema sobre la recta que pasa por un punto interior. Toda recta que pasa por un punto interior a un triángulo corta en dos puntos al contorno, y sólo en dos.*

Supongamos, en efecto, una recta p que pasa por un punto O, interior a un triángulo ABC (fig. 36). Si la recta pasara por un vértice, cortaría al lado opuesto en un punto (8 ·5), y se verificaría para ella el teorema.

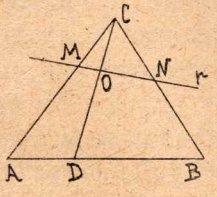


Fig. 36

Y si la recta p no pasa por ningún vértice, observemos, ante todo, que no puede cortar a los tres lados, pues si los cortara, el punto A y el B estarían en distinto semiplano respecto de p, y el B y C también estarían, y lo mismo el C y A, lo cual es absurdo (8 ·2) Habrá, pues, un lado que no tenga ningún punto en la recta p, por ejemplo, el lado AB. Uniendo entonces el vértice C con el punto O, la recta CO, como pertenecientes al ángulo ACB, cortará al lado AB en un punto D, que estará en distinto semiplano que C respecto de p, y en el mismo semiplano que A y que B, lo que prueba que C también está en distinto semiplano que los otros dos vértices, respecto de p, y p cortará a los segmentos AC y BC, como queríamos demostrar.

Obsérvese también que los puntos A y B, y por consiguiente los M y N, están en distinto semiplano respecto de CD, por lo cual O está entre M y N, y dividirá a la recta p en dos rayos OM y ON, por tanto, *todo rayo que par-*

te de un punto interior al triángulo corta en un punto y uno solo al contorno.

Las dos regiones en que el contorno del triángulo divide al plano se caracterizan por estas propiedades.

·2. *El segmento que une dos puntos del triángulo pertenece por entero al triángulo.* Pues estando sus extremidades en un mismo plano respecto de cada lado, todos sus puntos lo estarán también (9 ·2).

·3. *El segmento que une un punto* O *interior al triángulo con otro punto* Q *exterior, corta en un solo punto al contorno.* Pues la semirrecta OQ corta en un punto al contorno, y el punto está entre O y Q.

34. Propiedades métricas del triángulo

Supongamos un triángulo ABC (fig. 37); construyamos un ángulo A' tal que sea $\hat{A}' = \hat{A}$; sobre sus lados tomemos dos segmentos tales que sean A'B'=AB y A'C'=AC, y unamos C' con B'; se forma así un nuevo triángulo A'B'C', que tiene con el ABC un ángulo igual, y los lados que lo forman también iguales a los del otro. La misma definición de ángulo convexo (**22** ·1) parece que nos indica que los ángulos B y B' son iguales, pues están formados de la misma manera; y lo mismo los C y C', pero esto no lo podemos demostrar, y hay que postularlo.

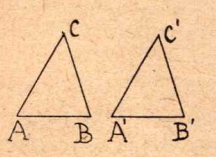


Fig. 37

·1. *Postulado sobre la igualdad de triángulos. Si dos triángulos tienen iguales un ángulo y los lados que lo forman, tienen también iguales los otros dos ángulos.*

·2. *Triángulos iguales.* Enseguida demostraremos que en el caso de la figura 37 también los terceros lados son iguales, o sea que los dos triángulos tienen sus seis elementos, lados y ángulos, ordenadamente iguales; y entonces se llaman iguales, según esta definición.

Dos triángulos se dicen iguales cuando tienen ordenadamente iguales sus lados y sus ángulos. Experimentalmente, cuando superpuestos coinciden.

La igualdad de los triángulos de la figura 37 la expresaremos simbólicamente escribiendo $_{A}{}^{C}{}_{B} = {}_{A'}{}^{C'}{}_{B'}$, con lo cual se escriben de una vez seis igualdades, que expresan que sus lados y ángulos son ordenadamente iguales, a saber :

$$AB=A'B' \text{ » } AC=A'C' \text{ » } BC=B'C' \quad \hat{A}=\hat{A}' \text{ » } \hat{B}=\hat{B}' \text{ » } \hat{C}=\hat{C}'$$

Vemos, pues, que en dos triángulos iguales, a cada lado del uno corresponde un lado en el otro, que es igual al primero, y se llama *correspondiente u homólogo*; y cada ángulo o vértice del uno tiene también su correspondiente u homólogo en el otro. La expresión simbólica de la igualdad de los dos triángulos debe escribirse de manera que cada vértice homólogo ocupe igual posición.

·3. *Igualdad directa e inversa.* En los triángulos situados en el mismo plano cabe distinguir la igualdad directa e inversa, lo mismo que en los ángulos de un mismo plano o que en los segmentos de una misma recta. Para esto supondremos recorrido el contorno de uno de los triángulos en uno de los dos sentidos posibles, y el del otro triángulo en el sentido homólogo o correspondiente; y así, por ejemplo, si los dos triángulos de la figura 38 son iguales en este orden $_{A}{}^{C}{}_{B} = {}_{A'}{}^{C'}{}_{B'}$ y el contorno del 1.° lo recorremos en el sentido ABC, el del 2.° lo deberemos recorrer en el sentido A'B'C', lo cual nos da para los ángulos una orientación (24) que es la misma para los tres ángulos del primer triángulo por definición, y también para los del segundo, pero que puede ser distinta para los ángulos de un triángulo y del otro, como lo es, efectivamente, en la figura 38 Por tanto :

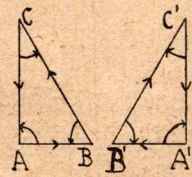


Fig. 38

Dados dos triángulos en el mismo plano, y elegidos sentidos homólogos en sus contornos, si los ángulos del uno resultan inversamente iguales a los del otro, los triángulos,

caso de ser iguales, los llamaremos inversamente iguales, y en caso contrario, directamente iguales. Los de la figura 37 son directamente iguales, y los de la figura 38 son inversamente iguales.

Por lo que respecta a la experiencia, materializando los triángulos, por ejemplo, con cartulinas recortadas, los de la figura 37, o sea directamente iguales, los podremos hacer coincidir, sin sacarlos de su plano durante el movimiento; pero a los inversamente iguales los tendremos que sacar de su plano para llevarlos a coincidir, dándoles un giro o vuelta de 180°, llamada vuelta de campana.

En el método adoptado por nosotros, esta coincidencia por movimiento no puede servirnos como procedimiento demostrativo.

35. Primer criterio de igualdad de triángulos

Existen criterios muy importantes para reconocer la igualdad de dos triángulos, cuando se conoce la igualdad de tres elementos.

·2. *Primer criterio. Si dos triángulos tienen iguales un lado y los dos ángulos adyacentes son iguales.*

Supongamos, por ejemplo, que los dos triángulos ABC y A'B'C' de la figura 39 tienen iguales los siguientes elementos :

$$AB = A'B' \quad » \quad C\hat{A}B = C'\hat{A}'B' \quad » \quad A\hat{B}C = A'\hat{B}'C'$$

entonces podemos deducir que los triángulos mismos son iguales, es decir, que tienen también iguales los otros tres elementos:

$$AC = A'C' \quad » \quad BC = B'C' \quad » \quad A\hat{C}B = A'\hat{C}'B'$$

Y en efecto: si el lado AC no fuese igual al A' C', uno de los dos sería mayor que el otro, por ejemplo, el 2.° mayor que

el 1.°, y entonces podríamos tomar sobre el lado A' C' un punto interior D, tal que fuese A' D = AC; los triángulos ABC y A' B' D tendrían iguales un ángulo : $\hat{A} = \hat{A}'$, y los lados que lo forman, a saber : AB = A' B' por hipótesis, y AC = A' D por construcción; en cuyo caso, aplicando el postulado sobre igualdad de triángulos (34 ·1) se deduciría que también eran iguales estos dos ángulos $A'\hat{B}'D = A\hat{B}C$, y por tanto, estos $A'\hat{B}'D = A'\hat{B}'C'$, cosa absurda, puesto que uno es parte de otro (25 ·4). Resulta de esto que los lados AC y A' C' no pueden ser desiguales.

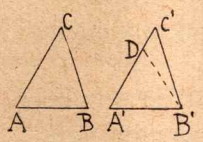


Fig. 39

Aplicando el mismo razonamiento a los otros dos lados, resultará que también serán iguales, es decir, BC = B' C'.

Y como por otra parte hemos demostrado que los dos triángulos tienen iguales los ángulos A y A', y los lados que los forman, resultará del postulado sobre la igualdad de triángulos, que también serán iguales los otros dos ángulos $A\hat{C}B = A'\hat{C}'B'$, y $A\hat{B}C = A'\hat{B}'C'$.

Los dos triángulos son, pues, iguales, por tener iguales los seis elementos.

36. Segundo criterio de igualdad de triángulos

·1. *Si dos triángulos tienen respectivamente iguales dos lados y el ángulo comprendido, son iguales.*

Es decir, si en los triángulos de la figura 40 se verifica :

$$AB = A'B' \;\; » \;\; AC = A'C' \;\; » \;\; \hat{A} = \hat{A}'$$

esos triángulos son iguales. Pues al tener iguales un ángulo $\hat{A} = \hat{A}'$, y los lados que lo forman, tendrán iguales, respectivamente, los otros dos ángulos, según el postulado de igualdad de triángulos; y entonces, como tienen iguales un lado AB = A' B' y los ángulos adyacentes,

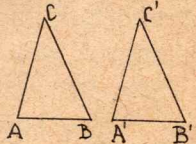


Fig. 40

según el primer criterio, los terceros lados serán iguales, o sea los triángulos serán iguales (35).

Antes de estudiar otros criterios de igualdad, apliquemos, éstos.

·2. *Aplicación al triángulo isósceles.* Dado un ángulo A, (figura 41), tomemos en sus lados dos segmentos iguales AB = AC, y unamos los puntos B y C; se forma así un triángulo, que por tener dos lados iguales, se llama *isósceles*, el ABC. El tercer lado, o sea BC se llama, especialmente, *base*, y el vértice opuesto, especialmente, *vértice*. En general, base de un triángulo es un lado cualquiera. *Si en el triángulo isósceles trazamos la bisectriz del ángulo en el vértice* A, *se forman dos triángulss iguales*, en este orden $_{B}^{A}{}_{D} = {}_{C}^{A}{}_{D}$ por tener iguales los ángulos en A y los lados que los forman; luego serán también iguales los otros tres elementos del triángulo, a saber: BD=CD » $B\hat{D}A = C\hat{D}A$ » $\hat{B} = \hat{C}$, de donde :

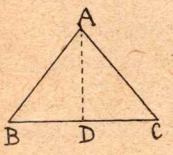


Fig. 41

En todo triángulo isósceles los ángulos en la base son iguales, y la bisectriz del ángulo en el vértice coincide con la mediana y la altura que parten de ese vértice, y por tanto, con la mediatriz de la base. Se le llama *eje de simetría* del triángulo.

·3. *Primer teorema del ángulo externo. Todo ángulo externo de un triángulo es mayor que cualquiera de los dos internos que no le son adyacentes* (fig. 42). Demostremos primero, que el ángulo externo DBC es mayor que el interno C, opuesto al lado prolongado. Tracemos para ello la recta AA' que pasa por el vértice A y el punto medio del lado opuesto O; tomemos en ella un segmento OA'=AO y unamos A' con B.

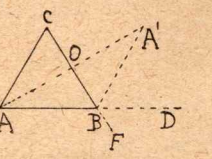


Fig. 42

Se han formado así dos triángulos iguales en este orden $_{A}^{O}{}_{C} = {}_{A'}^{O}{}_{B}$ puesto que tienen iguales los ángulos en O y los lados que los forman; y deducimos de la igualdad de esos trián-

gulos : $A\hat{C}O = A'\hat{B}O$, y como es $A'\hat{B}O$ una parte del externo DBC, será menor, luego : $A\hat{C}O < D\hat{B}C$. Para probar ahora que ese mismo ángulo externo DBC es mayor que el otro interno no adyacente BAC, basta trazar la recta que pasa por C y por el punto medio del segmento AB, prolongándola una cantidad igual a la distancia desde C a ese punto medio, con lo cual podemos probar igualmente que el ángulo BAC es menor que el externo FBA, y por tanto, menor que su igual DBC.

·4. *Triángulo rectángulo.* Si sobre los lados de un ángulo recto, y a partir de su vértice, tomamos dos segmentos cualesquiera, y unimos los extremos libres de estos segmentos, se forma un triángulo ABC (fig. 43), que tiene un ángulo recto, y cuyos otros dos ángulos son agudos, porque son menores que el externo en A; tal triángulo se llama *rectángulo*, llamándose *catetos* los lados que forman el ángulo recto, e *hipotenusa* el otro lado.

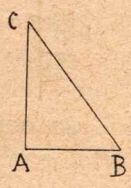


Fig. 43

Si dos triángulos rectángulos tienen iguales un cateto y el ángulo agudo adyacente, son iguales. Pues tienen también iguales los ángulos rectos, y tendrán iguales un lado y los ángulos adyacentes.

Y si dos triángulos rectángulos tienen iguales los dos catetos, serán iguales. Pues tendrán iguales dos lados (los catetos), y el ángulo comprendido.

·5. *Triángulo obtusángulo.* Tomando sobre los lados de un ángulo obtuso A dos segmentos cualesquiera, y uniendo los extremos libres, se forma un triángulo ABC (fig. 44) que tiene un ángulo obtuso y los otros dos agudos, porque son menores que el externo en A; a tal triángulo se le llama *obtusángulo*.

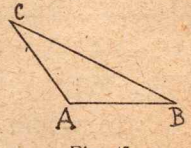


Fig. 45

Tanto a los obtusángulos como a los *acutángulos*, que tienen los tres ángulos agudos, se les llama *oblicuángulos*.

·6. *Perpendicular a una recta por un punto. Por todo punto dado pasa una perpendicular a una recta dada, y solo una.* En efecto, si el punto dado está en la recta, ya sabemos

que se puede trazar una perpendicular a la recta y solo una, pues al ángulo llano se le puede trazar una bisectriz y solo una (31 ·2).

Supongamos ahora que el punto esté fuera de la recta. Sea por ejemplo la recta p y el punto A (fig 45). Unamos A con un punto B de la recta p, y tracemos en el semiplano opuesto al que contiene A, una recta BA' que forme con p un ángulo igual al que forma la BA. Tomando luego BA' = BA, la recta que une A con A' será perpendicular a la p. Pues si la recta AA' pasa por B, formará con la p ángulos rectos; y si no pasa, cortará a la p en un punto D, por estar A y A' en distinta región, y se formarán dos triángulos iguales en este orden: $\overset{A}{B}D = \overset{A'}{B}D$, ya que tienen iguales los ángulos en B y los lados que los forman; lo que prueba que los ángulos en D son también iguales, y por consiguiente, rectos.

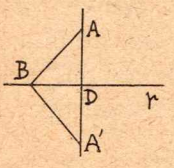


Fig. 45

Y no puede trazarse por A más de una perpendicular, porque si se pudieran trazar dos, formarían un triángulo con dos ángulos rectos, lo cual no puede ser, ya que un ángulo sería igual a un externo no adyacente.

37. Tercer criterio de igualdad de triángulos

Si dos triángulos tienen respectivamente iguales los tres lados, son iguales.

Es decir, que dados dos triángulos, si en ellos se verifican las igualdades AB = A'B' AC = A'C' BC = B'C', son iguales (fig. 46).

En efecto, sobre el segmento A'B' y en el semiplano que no contiene al punto C', construyamos un triángulo igual al ABC, trazando para ello desde A' un rayo que forme un ángulo B'A'C'' igual al A; tomando luego sobre ella un segmento A'C'' = AC, y uniendo finalmente C'' con B'.

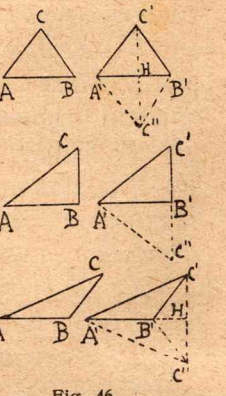


Fig. 46

Este triángulo construído será igual al ABC, por el segundo criterio (36).

Si demostramos ahora que los ángulos A'C'B' y A'C''B' son iguales, quedará demostrado que los triángulos A'B'C' y A'B'C'' son iguales, por tener iguales dichos ángulos y los lados que los forman, y quedará por fin demostrado el tercer criterio de igualdad.

Y al efecto, uniendo C' con C'', el segmento C'C'' cortará al A'B' en un punto H, y si este punto es distinto de A' y de B', se formarán dos triángulos isósceles, A'C'C'' y B'C'C'', en cada uno de los cuales los ángulos en la base son iguales, y sus sumas o diferencias, es decir $\hat{C}'$ y $\hat{C}''$ serán también iguales. Y si H coincidiera con un vértice tal como B' se formaría un solo triángulo isósceles, en el cual es desde luego $\hat{C}' = \hat{C}''$.

38. Cuarto criterio de igualdad de triángulos

1. *Si dos triángulos tienen respectivamente iguales un lado, el ángulo opuesto y un ángulo adyacente, son iguales.*

Es decir, que si los triángulos ABC y A'B'C', tiene iguales estos elementos $c = c'$ $\hat{A} = \hat{A}'$ $\hat{C} = \hat{C}'$, son iguales en el orden $_{A}{}^{C}{}_{B} = {}_{A'}{}^{C'}{}_{B'}$ (fig. 47).

Para demostrarlo, probemos que los lados *b* y *b'*, que unen los vértices de los ángulos iguales por hipótesis, son también iguales Pues si no fuera *b* igual que *b'*, uno de los dos sería mayor que el otro, por ejemplo *b'* mayor que *b*, y tomando entonces sobre *b'* un punto, D, tal que fuera A'D = AC, y uniendo D con B, se formarían dos triángulos iguales $_{A}{}^{C}{}_{B} = {}_{A'}{}^{D}{}_{B'}$ por tener dos ángulos iguales, los A y A', e iguales los lados que los forman. Y de esa igualdad resultaría

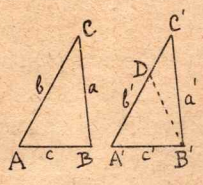


Fig. 47

$\hat{C} = A'\hat{D}B'$, luego $\hat{C}' = A'\hat{D}B'$, igualdad absurda,

porque en el triángulo B'C'D, el ángulo externo en D, tiene que ser mayor que el interno no adyacente, C' (36 ·3).

·2. En particular, *dos triángulos rectángulos son iguales si tienen respectivamente iguales un cateto y el ángulo agudo opuesto.* Pues también tienen iguales el ángulo recto, adyacente al cateto.

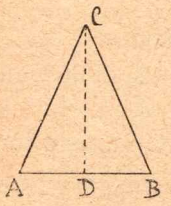


Fig. 48

Y *son también iguales si tienen iguales la hipotenusa y un ángulo agudo;* pues tendrán también iguales el ángulo recto, que es opuesto.

·3. *Un triángulo que tenga dos de sus ángulos iguales, tiene iguales los lados opuestos y es isósceles.* Pues trazando la bisectriz del tercer ángulo, se forman dos triángulos, iguales por el cuarto criterio (fig. 48)

39. El criterio dudoso de igualdad de triángulos

·1. *Si dos triángulos tienen respectivamente iguales dos pares de lados y los ángulos opuestos a un par de ellos, resultará, que los ángulos opuestos al otro par de lados, o son también iguales, y los triángulos serán iguales, o son suplementarios y desiguales y los triángulos no serán iguales.*

Es decir, que si en los triángulos ABC y A'B'C' suponemos que se verifican estas hipótesis:

$$BC = B'C' \quad AC = A'C' \quad \hat{A} = \hat{A}'$$

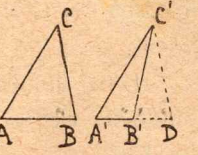


Fig. 49

resultará, que los ángulos B y B', o son iguales, y los triángulos serán iguales, o son suplementarios y desiguales, y los triángulos no serán iguales.

Para demostrar este teorema observemos que los terceros lados AB y A'B' o son iguales o son desiguales. Si son iguales, los triángulos lo serán, por tener iguales los tres lados, y lo serán los ángulos B y B'. Pero si no son iguales esos terceros lados, habrá uno mayor que el otro, por ejemplo el AB

mayor que el $A'B'$, como ocurre en la figura 49; se podrá tomar entonces un segmento $A'D$ igual al AB, y uniendo D con C' se formará un triángulo $A'DC'$ igual al ABC (**36**), por lo cual será $\hat{B} = \hat{D}$, y $DC' = BC = B'C'$, y al ser isósceles el triángulo $DB'C'$ resultará el ángulo obtuso en B' suplementario de su adyacente, del D y por fin del B, como queríamos probar.

2. En particular, *si dos triángulos rectángulos tienen iguales, respectivamente, la hipotenusa y un cateto, sin iguales.*

Pues estamos en el caso dudoso, por tener también iguales los ángulos rectos. Pero ahora, los ángulos que deben ser suplementarios o iguales son agudos y tendrán que ser forzosamente iguales, y los triángulos también.

Ejercicios

Demostrar que son iguales dos triángulos isósceles cuando tienen respectivamente iguales la base y un ángulo adyacente, o un lado no básico y el ángulo en el vértice; o la base y otro lado; o la base y el ángulo opuesto.

Probar que en dos triángulos isósceles con la base común, la recta que une los vértices es eje de simetría de ambos triángulos.

LECCIÓN 6.ª

RELACIONES DE DESIGUALDAD EN LOS TRIÁNGULOS

40. Relaciones de desigualdad entre los lados de un triángulo.

·1. *Caso del triángulo rectángulo. En todo triángulo rectángulo, la hipotenusa es mayor que cualquiera de los catetos.*

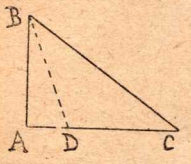


Fig. 50

Pues si la hipotenusa fuera igual a alguno de los catetos, el triángulo rectángulo sería isósceles, siendo la base el otro cateto (**36** ·2), lo cual no puede ser, porque los ángulos adyacentes a esa base son uno recto y otro agudo, y por consiguiente no pueden ser iguales (**36** ·4). Y si la hipotenusa fuera menor que alguno de los catetos, como por ejemplo, si en el triángulo rectángulo ABC (fig. 50), supusiéramos la hipotenusa BC menor que el cateto CA, podríamos tomar dentro del cateto un segmento CD igual a la hipotenusa, y se formaría un triángulo isósceles, el BCD, cuya base era BD; pero esto no puede ser, porque los ángulos adyacentes a la base son el uno agudo, y el otro obtuso, como adyacente a un agudo.

·2. *Caso de un triángulo cualquiera. En todo triángulo un lado cualquiera es menor que la suma de los otros dos, y mayor que su diferencia.*

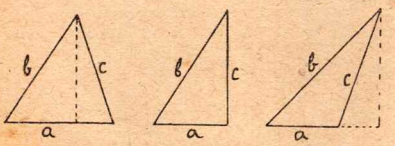


Fig. 51

En efecto, si llamamos *a*, *b*, y *c* a los lados de un triángulo, para demostrar que el *a* es menor que la suma de los otros dos, basta suponer que trazamos por el vértice opuesto al *a*, la altura del triángulo, y el pie de

ella podrá caer, o dentro del lado *a*, o en una extremidad, o en prolongación de *a*. En el primer caso el triángulo queda dividido en dos triángulos rectángulos, como se vé en la fig. 51, y en cada uno de ellos la hipotenusa es mayor que el cateto que forma parte de *a*, luego la suma de las dos hipotenusas será mayor que la suma de esos dos catetos, o sea mayor que *a*.

Es decir : $b + c > a$.

Y en el segundo y tercer caso, solamente uno de los lados es ya mayor que el *a*, luego, con mayor razón lo será la suma $b + c$.

Y para demostrar que un lado cualquiera, tal como el *a*, es mayor que la diferencia de los otros dos, basta aplicar el teorema que acabamos de demostrar al mayor de estos dos, por ejemplo, el *b*, con lo cual será : $b < a + c$, y restando *c* a los dos miembros : $b - c < a$.

3. *Aplicaciones*. Vamos a ver dos aplicaciones inmediatas del teorema anterior. Supongamos primero que en los lados de un ángulo se toman dos puntos E y F (fig. 52) y se unen; y en los lados de su opuesto por el vértice se toman otros dos puntos C y D, y se unen; se forma así una figura que podemos llamar *cuadrilátero cruzado*, pues tiene cuatro lados, dos que no se cortan, que son el EF y CD, y otros dos que se cortan en un punto A, que son ED y CF; figura que está formada por dos triángulos con un vértice común.

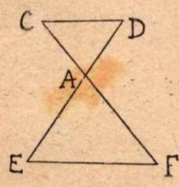


Fig. 52

En cada triángulo se verifica que un lado, el opuesto al vértice común, A, es menor que la suma de los otros dos, luego la suma de los lados que no se cortan del cuadrilátero será menor que la suma de los otros dos, por tanto :

En todo cuadrilátero cruzado la suma de los lados que no se cortan es menor que la suma de los lados que se cortan.

Y supongamos, en segundo lugar, tres puntos A, B y C no

alienados; tracemos los segmentos AB y BC (fig. 53), y tomando un punto D, interior al triángulo ABC, unámoslo con los vértices A y C. Si en el triángulo ABC, prescindimos del ADC, la figura que queda la podemos llamar *cuadrilátero con un ángulo cóncavo*, pues tiene cuatro lados, el AB, el BC, el CD y el DA, y el ángulo en D, formado por rayos que pasan por puntos interiores al cuadrilátero, es un ángulo cóncavo (22 ·2). La prolongación del lado AD por D corta al lado opuesto al vértice A, en el triángulo ABC, o sea al BC (9 ·1), en un punto que llamaremos E. Aplicando ahora el teorema anterior a los triángulos AEB y DCE, se tendrán las relaciones

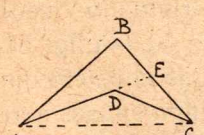


Fig. 53

$$AD + DE < AB + BE$$
$$DC < EC + DE$$

que sumadas ordenadamente, y restando DE a los dos miembros, nos dan $AD + DC < AB + BC$, luego:

En el cuadrilátero con un ángulo cóncavo la suma de los lados que limitan este ángulo es menor que la suma de los otros dos lados.

41. Comparación entre las magnitudes de los lados y las de sus ángulos opuestos en un triángulo

·1. *En un triángulo, a lados iguales se oponen ángulos iguales, y a mayor lado se opone mayor ángulo; y recíprocamente, a ángulos iguales se oponen lados iguales, y a mayor ángulo se opone mayor lado.*

Los teoremas directos significan que si en un triángulo los lados *a* y *b* son iguales, los ángulos opuestos $\hat{A}$ y $\hat{B}$ también son iguales; lo cual es verdad porque el triángulo es isósceles, y los ángulos en la base serán iguales (36 ·2); y por el contrario, si el lado *a* es mayor que el *b*, el ángulo opuesto al *a*, o sea el

$\hat{A}$, será mayor que el opuesto al b, o sea el $\hat{B}$. Y en efecto, en el interior del lado a podremos tomar un segmento CD igual al b, como se ve en la figura 54, en cuyo caso, uniendo D con A se formará un triángulo isósceles, el ADC, en el cual serán iguales los ángulos básicos, señalados con los números 1 y 2. Pero el ángulo $\hat{1}$ es mayor que el B, por ser el $\hat{1}$ externo al triángulo ABD (**36** ·3), y como el CAB es mayor que el $\hat{2}$, y por tanto, que el $\hat{1}$, con mayor razón será mayor que el B, como queríamos demostrar.

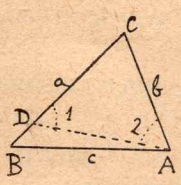


Fig. 54

Los recíprocos se pueden demostrar directamente. Y en efecto, que a ángulos iguales se oponen lados iguales, ya lo demostramos anteriormente (**38** ·3). Y que a mayor ángulo se opone mayor lado, se demuestra observando que si en el triángulo de la figura 55 suponemos el ángulo A mayor que el B, o sea $C\hat{A}B > \hat{B}$ podremos tomar en el interior de $\hat{A}$ un ángulo BAD, igual al $\hat{B}$, formándose un triángulo BAD que tiene dos ángulos iguales, y que según lo que acabamos de decir, es isósceles, siendo BD = AD, luego será : AD + DC > AC, y BD + DC > AC, como queríamos demostrar.

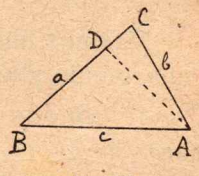


Fig. 55

Pero estos recíprocos se pueden demostrar también por *reducción al absurdo*; y así, para demostrar, por ejemplo, que si es $\hat{A} > \hat{B}$, será $a > b$, basta observar que si no fuera así, tendría que ser : o $a = b$, en cuyo caso, según el directo, sería $\hat{A} = \hat{B}$ contra la hipótesis; o sería $a < b$, en cuyo caso sería $\hat{A} < \hat{B}$, también contra la hipótesis. Y lo mismo se demuestra que si es $\hat{A} = \hat{B}$, será $a = b$.

El caso de estos recíprocos es un caso particular del llamado:

·2. *Segundo principio de inversión.* Dice que, *si en una cuestión se han hecho todas las hipótesis posibles y se ha llegado a conclusiones que se excluyen, los recíprocos son ciertos.*

Y así, con los lados *a* y *b* de un triángulo no caben más que estas tres hipótesis: o es $a > b$, o es $a = b$, o es $a < b$, y en cada una de estas tres hipótesis se llega a conclusiones que se excluyen, es decir, que no pueden ser ciertas dos a la vez, y son $\hat{A} > \hat{B}$ $\hat{A} = \hat{B}$ $\hat{A} < \hat{B}$; y entonces los recíprocos son ciertos. Lo cual hemos visto que se demuestra por reducción al absurdo.

Más adelante trataremos del que se llama primer principio de inversión.

42. Triángulos con dos lados respectivamente iguales

Veamos ahora un teorema que viene a ser una ampliación del segundo y tercer criterio de igualdad de triángulos.

·1. *Si dos triángulos tienen respectivamente iguales dos pares de lados, la misma relación de igualdad o desigualdad que haya entre los ángulos comprendidos, habrá entre los terceros lados*

Es decir, que si en dos triángulos A B C y A' B' C', (figura 56), se verifica A B = A' B' y A C = A' C' según sea C $\hat{A}$ B mayor, igual o menor que C' $\hat{A}$' B', así será, respectivamente B C mayor, igual o menor que B' C'.

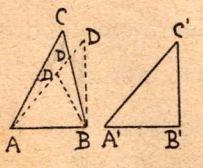


Fig. 56

En efecto, el caso de igualdad ya está demostrado por el segundo criterio de igualdad de triángulos (**36** · 1). Si es $\hat{A}$ desigual al $\hat{A}$' uno de los dos será mayor que el otro y podremos construir dentro del mayor un ángulo que sea igual al menor, como se ve en la figura, en la cual se supo-

ne que es $\hat{A} > \hat{A}'$ y que se ha construído $B\hat{A}D = \hat{A}'$. Tomando entonces $AD = A'C'$ se formarán dos triángulos iguales en este orden $_A{}^D{}_B = {}_{A'}{}^{C'}{}_{B'}$. Entonces, si el punto D resulta interior al triángulo A B C, se forma un cuadrilátero con un ángulo cóncavo (**40** · 3), en el cual se verifica $AD + DB < AC + CB$, y restando a ambos miembros una longitud igual, la $AD = AC$, queda: $C'B' < CB$, pues $DB = C'B'$.

Si el punto D cayera en el mismo lado, sería evidentemente $C'B' < CB$.

Y si D cayera fuera del triángulo A B C tendríamos un cuadrilátero cruzado (**40** · 3), en el cual se verifica $AC + BD < AD + BC$, y restando a ambos miembros $AC = AD$, queda

$$BD < BC \text{ o } B'C' < BC$$

El teorema, pues, está demostrado.

Los recíprocos serán ciertos en virtud del segundo principio de inversión (**41** · 1), y se podrán demostrar por reducción al absurdo; pudiéndose comprender en un enunciado general que diga:

· 2. *Si dos triángulos tienen respectivamente iguales dos pares de lados, la misma relación de igualdad o desigualdad que haya entre el tercer par de lados habrá entre los ángulos opuestos a este par.*

Ejercicios

Demuéstrese con todo detalle, por reducción al absurdo, los recíprocos enunciados en los párrafos 41 y 42.

Demuéstrese de una manera general el segundo principio de inversión, suponiendo que de todas las hipótesis posibles: $p, p_1, p_2 \ldots p_n$, de una cuestión se obtienen conclusiones que se excluyen $q, q_1 q_2 \ldots q_n$, y entonces los recíprocos son ciertos, por reducción al absurdo.

LECCIÓN 7.ª

LÍNEAS POLIGONALES Y POLIGONOS

43. Líneas poligonales o quebradas

·1. *Definiciones.* Supongamos *n* puntos que les llamamos A_1 A_2 A_3.. A_n, los segmentos $A_1 A_2$, $A_2 A_3$... $A_{n-1} A_n$ forman una figura que se llama línea poligonal o quebrada, abierta; y los mismos segmentos, mas el $A_n A_1$ forman una *línea poligonal o quebrada, cerrada.* Los *n* puntos se llaman *vértices* de la poligonal, pero en las abiertas, el punto A_1 y el A_n se llaman más comúnmente *extremidades* o extremos Sin embargo, cuando en la poligonal abierta se elige uno de los dos sentidos en que puede ser considerada, el primer punto y el último se llaman respectivamente *origen* y *extremo.*

Los segmentos que forman la poligonal se llaman *lados.* Y un segmento que una dos vértices, y que no sea lado, se llama *diagonal.*

·2. *Clasificación de las poligonales.* Si las poligonales tienen todos sus puntos en un plano se llaman *planas*, y en caso contrario *alabeadas.* En la Geometría plana no podemos referirnos más que a las primeras.

Si los lados no consecutivos de una poligonal no tienen puntos comunes, se llama *simple*, y en caso contrario *cruzada.* Por regla general no nos referiremos más que a las simples.

Si todos los puntos de una poligonal están en un mismo semiplano respecto de las rectas que contienen a cada lado, se llama *convexa*, y en caso contrario *cóncava.* Como las más importantes son las convexas de ellas trataremos especialmente.

Se sobreentiende que tres vértices de ellas no pueden estar en una recta.

44. División del plano por una poligonal convexa y cerrada.

Toda poligonal convexa y cerrada de n *vértices divide al plano en dos regiones, la una formada por los* (n — 2) *triángulos que se forman ordenadamente, uniendo un vértice cualquiera de la poligonal con los demás, y la otra por los otros puntos del plano, y los de la misma poligonal, que se consideran pertenecientes a las dos regiones.*

En efecto, supongamos una poligonal cerrada y convexa ABCDEFA (figura 57), si consideramos un vértice cualquiera, tal como el A, observaremos que todos los vértices están en el mismo semiplano, respecto de la recta AB, y también en el mismo semiplano respecto de la AF, por ser convexa la poligonal, por lo cual todos los vértices están en la región angular BAF (16), y las semirrectas que unen A con los demás vértices serán rayos del ángulo convexo BAF (22 · 1). Observemos además que en el triángulo ABC no puede haber ningún vértice de la poligonal, excepto los del triángulo, pues si lo hubiera tendría que ser cortado alguno de los lados AB o AC por alguno de los otros (33 · 1) y no sería convexa. Resulta de esto, que el ángulo BAF es descompuesto por el rayo AC en dos partes, en una de las cuales están todos los vértices, menos el B; y la poligonal ACDEFA será también convexa, puesto que también todos sus vértices están respecto de AC en el mismo semiplano. Razonando para esta poligonal como para la dada, se verá que el triángulo ACD, que no tiene común con el ABC mas que los puntos de AC, no contiene ningún vértice de la poligonal, excepto los A, C y D; y suponiendo proseguido el razonamiento, resultará que existe una figura formada por tantos triángulos como lados hay menos dos, formados cada uno en su contorno por un lado, y dos diagonales, excepto el primero y último, cuyo contorno está formado por dos lados y una diagonal. A esta región, formada por estos (n—2) triángulos se llama *polígono convexo* como ahora vamos a explicar, y sus puntos que no pertenecen a la poligonal se llaman *interiores* al polígono, y los demás puntos del plano, que no son del polígono, se dicen *exteriores* a éste.

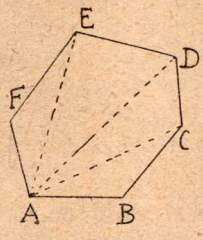


Fig. 57

45. Polígonos convexos

·1. *Dada una poligonal convexa de* n *lados los* (n—2) *triángulos que se forman al unir un vértice con los demás componen una figura que se llama polígono convexo de* n *lados y* n *vértices.*

Los ángulos convexos formados por cada dos lados que concurren en un vértice se llaman *ángulos del polígono*, y sus ángulos adyacentes se llaman *ángulos externos* del polígono.

Los lados forman el *contorno* y su suma se llama *perímetro.*

Esta definición de polígono convexo se justifica observando que cualquiera que sea el vértice que se elija para trazar diagonales, la figura obtenida es la misma. Y esto es así, porque la definición de polígono convexo y la definición dc triángulo (9 ·1), nos enseñan que el polígono convexo está formado por los segmentos que unen un vértice, tal como el A, con los demás puntos de la poligonal convexa; y resulta de ello que los puntos del polígono están respecto de la recta que contiene a cada lado, en el mismo semiplano que están los vértices todos de la poligonal, mientras que los demás puntos del plano no pueden cumplir esa propiedad.

·2. *Propiedades gráficas.* Las propiedades gráficas del polígono convexo son consecuencia de las del triángulo (34), y por razones de brevedad, no hacemos sino enunciar las siguientes:

Toda recta que pase por un punto interior a un polígono convexo, corta al contorno en dos puntos, y solo en dos.

Toda semirrecta que parta de un punto interior al polígono convexo, corta al contorno en un solo punto.

Todo segmento que une dos puntos del polígono convexo, pertenece por entero al polígono.

Todo segmento que une un punto interior al polígono con un punto exterior, tiene un punto en el contorno y solo uno.

46. Igualdad de polígonos convexos

La igualdad de polígonos la vamos a considerar como un caso particular de la igualdad de figuras en general, que pasamos a estudiar.

·1. *Figuras iguales.* En la lección 3.ª hemos estudiado la igualdad de segmentos, tomando como primitivo el concepto de segmentos iguales (**12** ·1); en la Lección 4.ª, la igualdad de ángulos, tomando también como primitivo el concepto de ángulos iguales (**25** ·1); y en la lección 5.ª, la igualdad de triángulos, dando una definición particular de triángulos iguales (**34** · 2).

En general, se puede dar un concepto *intuitivo* de figuras planas iguales diciendo que son dos figuras que superpuestas coinciden.

Pero tal concepto carece de precisión lógica, por lo cual vamos a examinar si los segmentos, ángulos y triángulos iguales tienen alguna propiedad característica que podamos tomarla como definición general.

Supongamos en primer lugar dos *segmentos iguales* AB = = A'B' (fig. 58), es decir, dos segmentos que verifican la relación de igualdad del párrafo (**12** ·1) A cada punto, tal como el C, del primero, le podemos hacer corresponder otro punto C' del segundo, para el cual se tenga AC = A'C', y a cada punto D' del segundo, otro D, del primero, para el cual se tenga : AD = A'D'. Esta correspondencia entre los puntos de los dos segmentos se llama *correspondencia biunívoca*, porque a cada punto de cualquiera de los segmentos corresponde un punto, y uno solo, del otro.

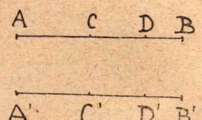


Fig. 58

Pero esta correspondencia tiene esta propiedad : *que cualquier segmento, tal como el* CD *que une dos puntos de uno de ellos, es igual al segmento* C'D' *que une sus homólogos;* ya que restando las igualdades AD = A'D' » AC = A'C' se obtiene esta otra : CD = C'D'.

A toda correspondencia biunívoca que verifique esta propiedad la vamos a llamar correspondencia de igualdad.

Recíprocamente, si dos figuras F *y* F' *son tales que sus puntos verifican la citada correspondencia de igualdad, y una de ellas, la* F, *es un segmento*, AB, *la otra*, F' *tiene que ser otro segmento*, A'B', *igual al primero*. Pues la figura F se compondrá de los puntos A y B y de los situados entre ambos (**1** ·4); mas para todo punto C, interior a ese segmento se verifica: AB = AC + CB, por lo cual, entre los puntos A', B' y C' de la F', homólogos de los A, B y C, se tendrá que verificar, según (**13** ·2), que también es A'B' = A'C' + C'B'. Esto nos dice que C' no puede formar triángulo con A' y B', ya que un lado de un triángulo no puede ser igual a la suma de los otros dos (**40** ·2); ni puede estar en prolongación del segmento A'B', pues tampoco se verificaría esa igualdad, luego C' estará entre A' y B'. Además, todo punto D' del segmento A'B' ha de tener su homólogo, D, en AB, que es el que verifica la igualdad AD = A'D', lo que acaba de probar que la figura F' es el segmento A'B'. Y según la hipótesis deberá ser A'B' = AB.

Supongamos en segundo lugar dos *ángulos iguales* $A\hat{O}B = A'\hat{O}'B'$ (fig. 59), es decir, dos ángulos que verifican la relación de igualdad del párrafo (**25** ·1). Como los ángulos están compuestos de rayos (22), y éstos, de puntos (11), podemos considerar a los ángulos como figuras puntuales. Tratemos de establecer también una correspondencia biunívoca entre los ángulos dados, y para ello hagamos corresponder a cada punto C del ángulo AOB otro punto C' del A'O'B', tal que sea $A\hat{O}C = A'\hat{O}'C'$ y OC = O'C'; y asímismo, a todo punto D' del segundo, otro del primero D, tal que sea: $A\hat{O}D = A'\hat{O}'D'$ y OD = O'D'.

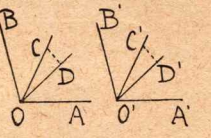


Fig. 59

Tal correspondencia biunívoca cumple, como en los segmentos iguales, esta propiedad: CD = C'D', pues se verifica la igualdad de triángulos: $\overset{O}{DC} = \overset{O'}{D'C'}$ por tener iguales los ángulos en O y O', que son diferencias de ángulos iguales, y los lados que los forman (36).

Recíprocamente, si F *y* F' *son dos figuras que verifican la citada correspondencia de igualdad, y la* F *es un ángulo* BAC (fig. 60), *la* F' *será también otro ángulo* B'A'C' *igual al primero*.

Para demostrarlo consideremos solamente el caso en que BAC sea un ángulo convexo, pues si fuera cóncavo o llano, se puede descomponer en dos convexos, y reducirse al caso anterior. Sabemos entonces que la figura F está compuesta de todos los semirrayos que parten de A y pasan por algún punto, tal como el D, del segmento BC (22). Pero observemos que no estando A en la recta CB, tampoco puede estar A' en la recta C'B', ya que si lo estuviera, de estos tres puntos, tendría que estar uno entre los otros dos (3 ·2), y lo mismo ocurriría a los A, B y C, según el caso estudiado de los segmentos iguales. En cambio, estando D en el segmento BC estará su homólogo D' en el segmento B'C', y al rayo AD de la figura F le debe corresponder el rayo A'D' de la F', por análoga razón. Y como también a todo rayo del ángulo A' le debe corresponder un rayo del A, se deduce que la figura F' está formada por los rayos que partiendo de A' pasan por algún punto del segmento C'B', es decir, es al ángulo convexo B'A'C', el cual será, por otra parte, igual al BAC por ser iguales los triángulos $\overset{C}{AB} = \overset{C'}{A'B'}$ que tienen por hipótesis los tres lados respectivamente iguales (37).

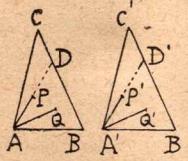


Fig 60

Supongamos en tercer lugar dos *triángulos* iguales $\overset{C}{AB} = \overset{C'}{A'B'}$ (fig. 60), es decir, dos triángulos que tienen respectivamente iguales los tres lados y los tres ángulos (34 ·2). Se puede establecer también una correspondencia biunívoca entre sus puntos. Para ello recordemos que el triángulo ABC está formado por los segmentos que unen A con algún punto del segmento BC (32); y a todo punto P de él podemos hacerle corresponder otro punto P', que se halla buscando el D' homólogo del D, de tal modo que sea BD=B'D'; entonces será : AD=A'D' porque son iguales los triángulos $\overset{D}{AB} = \overset{D'}{A'B'}$ que tienen iguales los ángulos en B y B', y los lados que los forman; y habrá, por tanto, en el segmento A'D' un punto P', tal que sea $B\hat{A}P = B'\hat{A}'P'$ » AP = A'P', y será homólogo de P.

Análogamente se buscaría el Q, homólogo del Q ', y razonando como para los ángulos se deduce que es PQ = P ' Q '.

Recíprocamente, si F y F' son dos figuras que verifican la citada correspondencia de igualdad y la F es un triángulo ABC, la F' será otro triángulo A' B' C', igual al F. Pues a todo punto D del segmento BC corresponderá un punto D', del C ' B ', y recíprocamente; y a todo punto P del

segmento AD corresponderá un punto P' del segmento A' D', y recíprocamente; lo que prueba que F' se compone de los segmentos que parten de A' y pasan por algún punto de B' C', será por tanto el triángulo A' B' C'; que es igual, por otra parte, al ABC, por tener los tres lados respectivamente iguales a los de éste.

El análisis anterior nos conduce a la siguiente definición de figuras iguales, que la verifican los segmentos, ángulos y triángulos que anteriormente habíamos llamado iguales :

Dos figuras las llamaremos iguales cuando entre sus puntos se puede establecer una correspondencia biunívoca, tal que todo segmento que una dos puntos de una de ellas sea igual al que une los puntos correspondientes de la otra.

·2. *Propiedades principales de las figuras iguales.*

a) La igualdad de figuras ahora definida cumple las tres propiedades características de toda equivalencia : *reflexiva*, *simétrica* y *transitiva* (**12** ·2); pues las cumple la igualdad de segmentos en la cual se funda.

b) Si dos figuras F y F' son iguales, a toda *parte* f de la primera corresponde otra *parte* f', de la segunda, *igual a la* f.

Pues los puntos correspondientes a los que forman la *f* compondrán otra figura *f'*, y los segmentos que unen puntos correspondientes de estas dos figuras serán iguales.

En particular, de los razonamientos hechos al buscar la definición de figuras iguales se deduce :

c) Si tres puntos de F están en *línea recta*, sus homólogos de F' *también lo están*, de tal modo, que si C está entre A y B, estará C' entre A' y B'.

d) A todo *segmento* de F corresponde otro *segmento* igual en F'.

e) A toda *recta* de F corresponde otra *recta* igual en F'.

f) A *n* puntos A, B, C, .. H, *ordenados* en línea recta en F, corresponden otros *n* puntos A', B', C', ... H', también *ordenados*, en línea recta, en F'.

Este teorema permite distinguir igualdad *directa* e *inversa* entre figuras que tengan sus puntos en una misma recta, como dijimos para los vectores (**12** ·1).

g) A todo *ángulo* o *triángulo* determinado por tres puntos de F, corresponde otro *ángulo* o *triángulo*, determinado por sus puntos homólogos de F', e *igual* al primero.

En fin, un estudio que nosotros no detallamos, permite demostrar que si un ángulo o triángulo de F es directamente igual al homólogo de F', sin ser inversamente igual a él, todos los demás ángulos o triángulos serán directamente iguales a sus homólogos, y las F y F' se llaman *directamente* iguales. Y lo contrario si son inversamente iguales dicho ángulo o triángulo.

Experimentalmente se distingue la igualdad directa o inversa de las figuras planas, viendo si para hacerlas coincidir no es necesario sacarlas de su plano, o sí es necesario, como dijimos para los triángulos (34 ·3).

·3 *Condición general de igualdad de dos polígonos convexos. Si dos polígonos convexos se pueden descomponer por medio de diagonales que partan de un vértice de cada uno, en el mismo número de triángulos respectivamente iguales, e igualmente dispuestos, dichos polígonos son iguales.* Supongamos, en efecto, dos polígonos (fig 61), tales que al trazar en cada uno las diagonales que parten respectivamente de los vértices A y A', queden descompuestos en los triángulos :

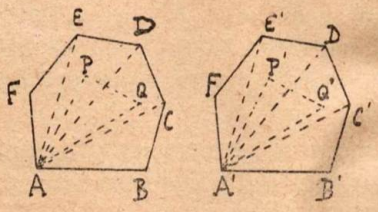


Fig. 61

$$\overset{C}{AB} = \overset{C'}{A'B'} \;\text{»}\; \overset{D}{AC} = \overset{D'}{A'C'} \;\text{»}\; \overset{E}{AD} = \overset{E'}{A'D'} \;\text{»}\; \overset{F}{AE} = \overset{F'}{A'E'}$$

entonces vamos a ver que los dos polígonos son iguales, lo cual significa que entre sus puntos se puede establecer una correspondencia biunívoca, tal que todo segmento que una dos puntos del uno sea igual al que une los puntos correspondientes.

Para ello hagamos corresponder a todo punto P, que pertenezca a uno cualquiera de los triángulos que componen el primer polígono, otro punto P', que está en el triángulo correspondiente del otro, elegido de tal manera que se verifique AP=A'P'

y $D\hat{A}P = D'\hat{A}'P'$, o lo que es igual, teniendo en cuenta la disposición de los triángulos, $B\hat{A}P = B'\hat{A}'P'$. Y para demostrar ahora que el segmento PQ que une dos puntos del primer polígono es igual al P'Q' que une sus puntos correspondientes, basta observar que son iguales los triángulos $\overset{Q}{AP} = \overset{Q'}{A'P'}$ por tener respectivamente iguales iguales dos lados y el ángulo comprendido, luego será PQ = P'Q'.

Obsérvese que esos dos polígonos, como figuras iguales tendrán las propiedades de tales figuras.

En particular, *los lados del primer polígono son ordenadamente iguales a los del segundo, y los ángulos comprendidos por lados iguales son también respectivamente iguales.*

El teorema recíproco es cierto, es decir, si dos polígonos tienen ordenadamente iguales sus lados y ángulos, son iguales, porque se pueden descomponer en triángulos iguales. Pero como sucede en los triángulos, no hace falta conocer la igualdad de todos los lados y ángulos, sino de algunos, como vamos a ver.

·4. *Criterios de igualdad de polígonos convexos. Se puede concluir que dos polígonos convexos del mismo número de lados son iguales si se sabe que tienen ordenadamente iguales todos los lados y los ángulos comprendidos entre lados iguales, exceptuados :*

a) *un lado y los dos ángulos adyacentes;*

b) *o dos lados y un ángulo, adyacente al menos a uno de ellos.*

c) *o tres ángulos consecutivos,*

sobre los cuales no se hace ninguna hipótesis.

Así por ejemplo, los dos polígonos de la figura 61 podemos concluir que son iguales, si se sabe que tienen ordenadamente iguales los lados y ángulos, excepto los AF y A'F', que no se sabe si son iguales, y los ángulos adyacentes $\hat{A}$ y $\hat{A}'$, $\hat{F}$ y $\hat{F}'$, que tampoco se sabe si son iguales; y decimos que los polígonos son entonces iguales; porque descomponiéndolos en triángulos por medio de diagonales que partan de A y A', los prime-

meros triángulos ABC y A'B'C' resultan iguales por tener respectivamente iguales dos lados y el ángulo comprendido, y de la igualdad de esos triángulos resulta la igualdad de las diagonales AC y A'C', y la de las dos partes en que están divididos los ángulos en C y en C'; de ellos se deduce la igualdad de los segundos triángulos ACD y A'C'D', y así sucesivamente, hasta llegar a los últimos triángulos que también son iguales por tener iguales dos lados y el ángulo comprendido. Análogamente se demuestran los otros criterios de igualdad de polígonos.

·5. *Aplicación a los cuadriláteros.* Los nombres que reciben los polígonos según el número de lados son los siguientes:

triángulo, cuadrilátero, pentágono, exágono, eptágono, octógono, eneágono, decágono..., según que ese número de lados sea, respectivamente, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10...

De aquí que el más importante, después del triángulo, sea el cuadrilátero, que se debía llamar cuadrángulo o tetrágono. Aplicando a él los anteriores criterios de igualdad, resulta:

Dos cuadriláteros son iguales si tienen ordenadamente iguales

a) *tres lados y los dos ángulos comprendidos;*

b) *o dos lados, y el ángulo comprendido, y otros dos ángulos igualmente dispuestos respecto a los lados ordenadamente iguales;*

c) *o los cuatro lados y un ángulo comprendido entre lados ordenadamente iguales.*

Teoremas que se pueden demostrar, o directamente, descomponiendo los cuadriláteros en dos triángulos por medio de una diagonal conveniente, o como caso particular de los polígonos.

·6. *Número de condiciones para la igualdad de dos polígonos convexos.* Como el polígono de n lados tiene también n ángulos, de los criterios anteriores se deduce que la igualdad de dos polígonos de n lados exige $(n + n - 3)$, o sea $(2n - 3)$ condiciones.

En particular, la igualdad de cuadriláteros exige cinco condiciones.

47. Relaciones de desigualdad en los polígonos convexos

·1. *En todo polígono convexo un lado cualquiera es menor que la suma de todos los demás.* Pues descomponiendo el polígono en triángulos por medio de diagonales que partan de un extremo del lado de que se trate, podremos aplicar sucesivamente a esos triángulos el teorema de que un lado es menor que la suma de los otros dos (40 ·2), con lo cual se obtendrá el teorema (fig. 62):

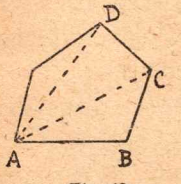


Fig. 62

$$AB < BC + AC < BC + CD + AD < \ldots$$

·2. *Se dice que un* polígono convexo está *inscrito* en otro cuando tiene sus vértices en el contorno de este otro, el cual se dice que está *circunscrito* al primero (fig. 63).

Cuando un polígono convexo está inscrito en otro el perímetro del inscrito es menor que el del circunscrito. Pues los vértices del inscrito dividen al contorno del circunscrito en varias partes, cada una de las cuales es mayor que el lado del inscrito que une sus extremos, luego la suma de las primeras es mayor que la suma de los lados del inscrito, o sea que su perímetro.

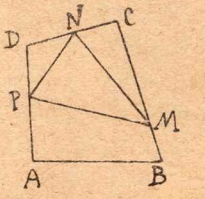


Fig. 63

·3. Se dice que un polígono convexo está *comprendido* en otro cuando todos los puntos del primero pertenecen al segundo. Según esto, los vértices del polígono comprendido tienen que ser interiores al otro polígono, o estar en su contorno (fig. 64).

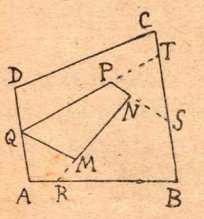


Fig. 64

Cuando un polígono convexo está contenido en otro su perímetro es menor que el de este otro. Para demostrarlo se supone que el contorno del perímetro comprendido se recorre en un cierto sentido, y los lados que terminen en un vértice interior al otro polígono se prolongan por

sus extremos, o sea todos en un sentido, hasta que corten al contorno de ese otro polígono. Aplicando luego a los lados prolongados, o sin prolongar, del polígono comprendido, el teorema (·1), se obtiene una sucesión de desigualdades, que sumadas ordenadamente dan origen a otra desigualdad, la cual una vez simplificada nos demuestra el teorema. Y así se tiene :

$$QP + PT < QD + DC + CT$$
$$PN + NS < PT + TS$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

·4. Como caso particular consideremos dos polígonos convexos, de los cuales uno esté contenido en el otro, y que tienen un lado común. Si se prescinde de ese lado común, los lados remanentes de ambos polígonos forman dos quebradas o poligonales que se dicen *envolvente* y *envuelta*, llamándose envuelta a la formada por lados del polígono que está contenido en el otro (figura 65). Aplicando el anterior teorema a esos dos polígonos resultará que el perímetro del comprendido es menor que el del otro; y si a los dos perímetros les restamos una misma longitud, que es la del lado común resulta :

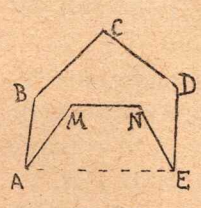


Fig. 65

De dos poligonales convexas, la una envolvente y la otra envuelta, la envolvente es mayor que la envuelta :

$$ABCDE > AMNE$$

48. Polígonos en general

Al término polígono se le dan varios significados. Muchas veces se dá ese nombre a las poligonales o quebradas cerradas, lo cual puede engendrar confusión, porque la idea de polígono debe evocar la de superficie, y no la de línea.

Así como el polígono convexo lo hemos definido como conjunto o agregado de triángulos, podemos también definir por triángulos el polígono general, procediendo por inducción. Nos

referiremos solamente a los polígonos cuyo contorno no se corta a sí mismo.

Para definir primero el *cuadrilátero* consideremos un triángulo ABC (fig. 66), y tomemos en su plano un punto D que determine con los extremos de un lado, tal como el BC, un triángulo BCD, sin puntos comunes con el anterior, salvo los del lado común BC. Es suficiente y necesario para ello tomar el punto D fuera de la recta BC, y respecto de esta recta, en el semiplano que no contiene al punto A.

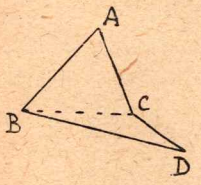


Fig 66

La figura formada por los dos triángulos ABC y BCD, se llama cuadrilátero ABDC, estando formado su contorno por los lados de los triángulos, excepto el lado común.

Para definir ahora el polígono de *n* lados supondremos definido por ese procedimiento el de $(n - l)$ lados, que constará de otros tantos triángulos menos dos; tomaremos luego en el plano de este un nuevo punto P, que determine con un lado MN, un triángulo MNP sin puntos comunes con el polígono de $(n—l)$ lados, salvo los del lado común MN; entonces, *el polígono de* (n—l) *lados y el nuevo triángulo forman una figura que se llama polígono de* n *lados, que son los del polígono primitivo y los del nuevo triángulo, exceptuando en ambos, el lado común MN.* Si el contorno es cóncavo el polígono se dice cóncavo.

De esta manera, por medio de los de 4 lados, se definen los de 5, y por medio de éstos los de 6, y así sucesivamente quedan definidos los de cualquier número de lados.

El estudio detallado de los polígonos cóncavos se sale de los límites de un libro elemental.

Ejercicios

Complétense las demostraciones del párrafo 46 y del 47.

LECCIÓN 8.ª

RECTAS PARALELAS Y RECTAS PERPENDICULARES

49. Rectas paralelas

1, *Recta secante a otras dos.* Cuando una recta *s* corta a otras dos rectas de un plano, *a* y *b*, en puntos distintos, forma con ellas ocho ángulos (fig. 66). De ellos hay cuatro *internos* a las rectas *a* y *b*, que son los designados en la figura con los números 3, 4, 5 y 6; y que se caracterizan por el hecho de que el segmento determinado por los puntos de intersección de *a* y *b* con la secante común, pertenece a uno de los lados de cada uno de dichos ángulos. Los otros cuatro ángulos se dicen exteriores, o mejor *externos*. Los ángulos situados en el mismo lado de la secante, es decir en el mismo semiplano de los dos en que esa secante divide al plano entero, se llaman *colaterales;* tales son por ejemplo los 2 y 6.

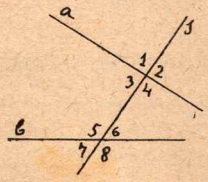


Fig. 67

Dos ángulos de los formados, el uno por la recta *a* y el otro por la *b*, se dicen *correspondientes*, cuando son colaterales y son uno interno y otro externo, tal como los 2 y 6; se dicen alternos-internos, o simplemente *alternos* cuando no son colaterales, pero son ambos internos, tales como los 3 y 6; y se dicen *conjugados* cuando son colaterales e internos, tales como los 4 y 6. Los conjugados también se llaman colaterales-internos.

Los cuatro ángulos formados por la recta *a* con la secante, son dos a dos opuestos por el vértice o adyacentes, luego serán

dos a dos iguales o suplementarios (**31** ·6), y lo mismo los formados por la recta *b* con la secante. De aquí se deduce este teorema :

Si al ser cortadas dos rectas, en puntos distintos, por una secante, se verifica entre los ángulos formados, alguna de estas condiciones :

a) *o que un par de ángulos correspondientes son iguales,*

b) *o que un par de ángulos alternos son iguales,*

c) *o que un par de ángulos conjugados son suplementarios,*

se verificarán las tres condiciones para todos los pares de ángulos; e inversamente, si alguna de las tres condiciones no se verifica para algún par de ángulos, no se verificará ninguna de las tres, para ningún par de ángulos.

Pues si por ejemplo fuera $\hat{2} = \hat{6}$ también sería $\hat{3} = \hat{6}$ ya que el $\hat{2}$ y el $\hat{3}$ son iguales por opuestos por el vértice; y también sería $\hat{4} + \hat{6} = 180°$, porque siendo el $\hat{4}$ suplementario del $\hat{2}$ también sería suplementario de su igual $\hat{6}$. Análogamente se demuestran los demás casos del teorema directo; y los inversos por reducción al absurdo.

Para llegar a demostrar la existencia de rectas de un plano que no se cortan antepongamos este otro teorema.

·2. *Si dos rectas se cortan, toda secante, que corte a las dos en puntos distintos, forma con ellas ángulos correspondientes desiguales* (y por tanto, ángulos alternos desiguales y ángulos conjugados no suplementarios).

En efecto, si las rectas que se cortan son AB y BC, y la secante común es AC (fig. 68), los tres puntos de intersección serán vértices de un triángulo ABC, en el cual el ángulo interno, A será menor que cualquiera de los externos no adyacentes, cuyo vértice es C (**36** ·3), luego existen dos ángulos correspondientes, el BAC y el $\hat{C}$ que son desiguales; y según el teorema anterior, lo serán los demás, y

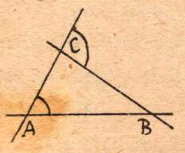


Fig. 68

lo serán los alternos, y no serán suplementarios los conjugados.

·3. *Existencia de rectas que no se cortan. Por todo punto exterior a una recta, pasa al menos otra recta que está en un plano con ella y que no la corta.*

En efecto, dada una recta AB y un punto P exterior a ella, unamos el punto P con otro punto Q de la recta por medio de otra recta PQ, y tracemos por P otra tercera recta PS (qg. 69), que esté en el plano determinado por P y por AB, y tal que sean iguales los ángulos correspondientes $B\hat{Q}P = S\hat{P}R$ (**25** ·3). Entonces la recta PS no puede cortar a la BA, porque si la cortara tendrían que formar con la secante PQ ángulos correspondientes desiguales, según acabamos de ver.

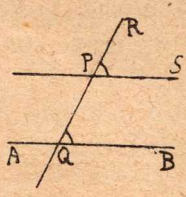


Fig. 69

Queda, sin embargo, la duda de si existirán otras rectas que pasen por P, y que estén en un plano con la AB, sin que la corten.

La intuición parece asegurar que no pasan, pero no se puede demostrar fundándonos sólo en los postulados anteriores; tenemos, pues, que postularlo en el caso en que lo queramos admitir.

·4. *Postulado de Euclides. Por un punto exterior a una recta no pasa más que otra recta que esté en un plano con ella y que no la corte*

La Geometría fundada en este postulado y en los anteriores, se llama Geometría Euclidiana. Si en vez de este postulado estableciéramos este otro: Por un punto exterior a una recta pasan siempre al menos otras dos rectas, que están en un plano con ella y que no la cortan; tendríamos una Geometría no Euclidiana, fundada por Labatschewsky y Bolvai, llamada Geometría hiperbólica, en contraposición a la Euclidiana, que se llama parabólica.

De igual manera, negando otros postulados que anteriormente al de Euclides se han establecido, se tienen otras Geometrías no Euclidianas, entre las cuales la llamada elíptica, es

debida a Riemann, y en ella dos rectas de un plano siempre se cortan.

Nosotros estudiaremos la Geometría Euclidiana, por lo cual admitimos el postulado de Euclides.

·5. *Definición de rectas paralelas.* En la Geometría Euclidiana las paralelas se definen diciendo que son *dos rectas que están en un mismo plano y que no se cortan.* El postulado de Euclides y el teorema sobre existencia de rectas que no se cortan (·3) pueden enunciarse conjuntamente diciendo :

por todo punto exterior a una recta pasa una paralela a ella y solo una. Se deduce inmediatamente el carácter transitivo del paralelismo, expresado en este teorema :

Dos rectas de un plano, paralelas a una tercera, son paralelas entre sí; pues si no lo fueran se cortarían, y por el punto común habría dos paralelas a esa tercera

50. Criterios de paralelismo

·1. *Teorema fundamental. Para que dos rectas sean paralelas es condición necesaria y suficiente que al ser cortadas por una secante formen con ella ángulos correspondientes iguales, o ángulos alternos iguales, o ángulos conjugados suplementarios.*

Para demostrar el teorema directo, o sea que la condición es *necesaria*, supongamos dos rectas *a* y *b*, paralelas por hipótesis (fig. 70).

Cortémoslas por una secante *s* y llamemos P al punto de intersección de *s* con *a*.

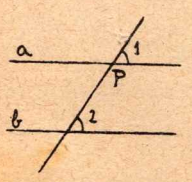


Fig. 70

La recta que pasa por P y es tal que la secante *s* forma con ella y con la *b* ángulos correspondientes iguales, no corta a la *b* (**49** ·3), y según el postulado de Euclides, esa recta tiene que confundirse con la *a*. Las *a* y *b* forman, pues, ángulos correspondientes iguales con la secante, y por tanto, ángulos alternos iguales y ángulos conjugados suplementarios (**49** ·1).

El teorema recíproco, o sea que la condición es *suficiente*, se puede demostrar, suponiendo ahora por hipótesis, que las rectas *a* y *b* son tales, que al ser cortadas por una secante común, *s*, forman con ella ángulos correspondientes iguales. Pero entonces sabemos que esas rectas no se cortan (49 ·3), luego son paralelas.

·2. Aquí podemos observar que la frase, *es condición necesaria y suficiente*, envuelve en si cuatro teoremas, a saber :

1.° Si *a* y *b* son paralelas, los ángulos 1 y 2 son iguales.

2.° Si los ángulos 1 y 2 son iguales, *a* y *b* son paralelas.

3.° Si *a* y *b* no son paralelas, los ángulos 1 y 2 no son iguales.

4.° Si los ángulos 1 y 2 no son iguales, *a* y *b* no son paralelas.

Pero en un teorema, la condición que se supone cierta se llama *hipótesis* y la que se trata de demostrar, *tésis* o conclusión.

Por otra parte, se llama *recíproco o inverso* de un teorema al que se obtiene permutando la tésis e hipótesis, y se llama *contrario u opuesto* de un teorema al que se obtiene negando la tesis e hipótesis de aquél.

Se demuestra por reducción al absurdo que *negando la hipótesis y la tésis de un teorema, y permutándolas se obtiene otro teorema equivalente*, es decir, que enuncia la misma verdad, luego esos cuatro teoremas a que hemos hecho mención se podrán disponer en el siguiente cuadro :

Para demostrar, por ejemplo, que los teoremas segundo y tercero son equivalentes, supongamos que se ha demostrado el el segundo, o sea que cuando los ángulos 1 y 2, son iguales las rectas *a* y *b* son paralelas; entonces, el tercero es una consecuencia, pues si *a* y *b* no son paralelas, los ángulos 1 y 2 no podrán ser iguales, ya que si lo fueran, las rectas *a* y *b* serían paralelas, contra la hipótesis. Este principio lógico constituye el llamado :

·3. *Primer principio de inversión;* que se puede enunciar, por ejemplo, refiriéndolo a los teoremas 2.° y 3.°, es decir : *el recíproco y el opuesto de un mismo teorema son equivalentes.* Luego, demostrado uno de ellos queda demostrado el otro.

·4. El 4.° teorema aplicado a los ángulos conjugados dice así :

Si dos rectas forman con una secante ángulos conjugados no suplementarios las rectas se cortan, de aquella parte en la cual la suma de los ángulos conjugados es menor que dos rectos.

En efecto, las rectas se cortan, pues si no se cortasen serían paralelas y los ángulos conjugados tendrían que ser suplementarios, contra la hipótesis. Además, si suponemos en la figura 71, que es $\hat{4} + \hat{6} <$ < 2 rectos, como es $\hat{5} + \hat{6} =$ dos rectos, será $\hat{4} < \hat{5}$, lo cual prueba que las rectas *a* y *b* no se pueden cortar del lado en que están el $\hat{1}$ y $\hat{5}$, ya que se tendría entonces un triángulo en que un ángulo externo era menor que un interno no adyacente (**36** ·3), lo cual no puede ser. Resulta, pues, que las rectas *a* y *b* se cortan del lado en que la suma de los ángulos conjugados $\hat{4}$ y $\hat{6}$ es menor que dos rectos.

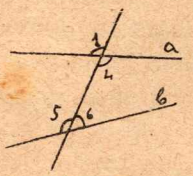


Fig. 71

·5. En particular, *una perpendicular y una oblícua a una recta se cortan, del lado en que la suma de los ángulos conjugados es menor que dos rectos.* De aquí se deduce que :

·6 *Si una recta es perpendicular a una de dos paralelas lo es a la otra.* Pues la corta, y no puede cortarla oblicuamente.

·7. *Dos perpendiculares a dos rectas que se cortan también se cortan.* Pues si no se cortaran serían paralelas y las otras dos rectas serían perpendiculares a las dos, lo cual no puede ser, ya que por un punto no pasan dos perpendiculares a una misma recta (**36** ·6).

·8. *Dos rectas de un plano, perpendiculares a una 3.ª, son paralelas.* Pues forman con ella ángulos conjugados suplementarios.

51. Perpendiculares y oblicuas

Ya vimos que por todo punto de una recta, o exterior a ella, se puede trazar una perpendicular a la recta y solo una (**36** ·6).

·1. Supongamos ahora que desde un punto A, exterior a una recta ED (fig. 72), se trazan una perpendicular y varias oblicuas, todas las cuales se limitan en el punto A, y en sus pies, o sea en sus puntos de intersección con la recta. Llamando por brevedad perpendiculares y oblicuas a los segmentos así limitados, se verifica :

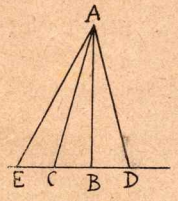


Fig. 72

a) *que la perpendicular es menor que cualquier oblicua.* Pues es un cateto de un triángulo rectángulo y la oblicua es hipotenusa, y ya sabemos que el cateto es menor (**40** ·1). Se llama *distancia* desde el punto A a la recta ED, a la longitud de AB.

b) *si dos oblicuas forman ángulos iguales con la perpendicular, o sus pies se separan lo mismo del pie de la perpendicular, son iguales.* Pues en ambos casos forman triángulos rectángulos iguales, que en la figura son $_{B}^{A}D = {}_{B}^{A}C$

c) *de dos oblicuas, si una de ellas forma mayor ángulo con la perpendicular que la otra, o su pie se separa más del pie de la perpendicular, será mayor que esa otra.*

En efecto, si las oblicuas están al mismo lado de la perpen-

dicular, como le ocurre a las AE y AC, la primera es mayor que la segunda, porque en el triángulo EAC que se forma, se opone a un ángulo obtuso, mientras que la AC se opone a un ángulo agudo, y a mayor ángulo se opone mayor lado (41). Y si están a distinto lado de la perpendicular, como le ocurre a las AE y AD, podremos trazar en el lado en que esté la AE, una oblicua AC que forme igual ángulo con la perpendicular que la AD, o que su pie se separe del pie de la perpendicular lo mismo que el de ésta; será por tanto igual a ella, y la AD resultará ser menor que la AE.

·2. Los recíprocos de los casos *b)* y *c)* son ciertos en virtud del segundo principio de inversión (41 ·2); y dicen:

b') *si dos oblicuas son iguales, forman ángulos iguales con la perpendicular, y sus pies se separan igual del de la perpendicular;*

c') *si dos oblicuas son desiguales, la mayor forma mayor ángulo con la perpendicular, y su pie se separa más del de la perpendicular.*

Ensáyese la demostración por reducción al absurdo y la directa.

52. Lugares Geométricos

·1. *Definición. Se llama lugar geométrico de los puntos o elementos geométricos que tienen una cierta propiedad, a la figura formada por todos los puntos o elementos que tienen dicha propiedad.*

Según esto, para demostrar que una figura F es el lugar geométrico de los puntos que tienen una propiedad P, es preciso demostrar dos teoremas: Uno *directo*, que diga que todo punto de F tiene la propiedad P; y otro *opuesto*, que diga que todo punto que no esté en F no tiene la propiedad P; o bien su equivalente según el primer principio de inversión, que es el recíproco del directo (50 ·3), que dirá, que todo punto que tenga la propiedad P está en F.

He aquí algunos lugares geométricos importantes.

·2. *El lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan (distan igual) de otros dos puntos dados del plano, es la mediatriz del segmento que une a éstos.* En efecto, todo punto de la mediatriz del segmento MN (fig. 73), tal como el A, equidista de los extremos M y N del segmento, porque las dos distancias MA y NA son oblicuas, cuyos pies se separan igual del pie de la perpendicular, y por tanto, son iguales. Y recíprocamente, todo punto, tal como el B, que equidiste de los M y N, está en la mediatriz del segmento MN, porque trazando la perpendicular desde B hasta MN, su pie equidistará de los pies de las oblicuas, puesto que éstas son iguales, luego dicha perpendicular trazada desde B será la misma mediatriz del segmento MN (51).

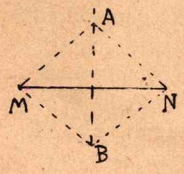


Fig. 73

·3. *El lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de los lados de un ángulo convexo, es la bisectriz de ese ángulo.* (Se sobrentiende, que tanto los lados como la bisectriz son rayos, es decir, semirrectas, y no rectas completas).

Pues todo punto de la bisectriz, tal como el A, equidista de los lados del ángulo (fig. 74), ya que trazando las distancias, se forman dos triángulos rectángulos iguales $_{A}^{N}O = _{A}^{M}O$ por tener la hipotenusa igual, e iguales los ángulos en O; luego AN = AM.

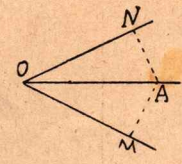


Fig. 74

Recíprocamente, si suponemos que el punto A, es equidistante de los lados del ángulo MON, ese punto A estará en la bisectriz del ángulo; pues trazando las dos distancias MA y NA, iguales por hipótesis, del punto A a los lados, y trazando el rayo OA, que pertenecerá evidentemente al ángulo, se formarán dos triángulos rectángulos, que sou iguales por tener iguales la hipotenusa y un cateto, luego los ángulos en O serán iguales, y el rayo OA será la bisectriz del ángulo.

Ejercicios

Dado un punto P, fuera de una recta *a*, trácese por P una perpendicular a la recta *a*, y por el mismo P, una perpendicular a esta perpendicular trazada; demuéstrese que la tercera recta es paralela a la *a*. Partiendo de la proposición que dice que una perpendicular y una oblicua a una misma recta se cortan, demuéstrese en la misma figura anterior que cualquiera otra recta que pase por P tiene que cortar a la recta *a*. Con esto se verá que la elección de postulado de las paralelas es, en cierto modo, indiferente, siendo la forma de Euclides la de que una perpendicular y una oblicua se cortan.

Demuéstrense los recíprocos de los teoremas 51, por reducción al absurdo y directamente. Dígase el lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de dos rectas completas que se cortan.

LECCIÓN 9.ª

APLICACIÓN A LOS TRIANGULOS Y CUADRILATEROS

53. Suma de los ángulos de un triángulo

·1. *La suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos rectos.* Para demostrarlo, trácese por un vértice, A, del triángulo una paralela al lado opuesto B C, y esta paralela (fig. 75) se verá que forma con los lados que concurren en A dos ángulos, que son respectivamente iguales a los B y C (50), por alternos, y como entre dichos ángulos y el A suman dos rectos, por formar un llano, también sumarán dos rectos entre los A, B y C. De aquí, que A sea suplemento de (B + C).

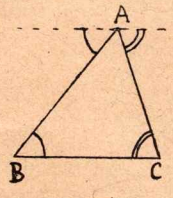


Fig. 75

·2. *Segundo teorema del ángulo externo.* Antes del postulado de Euclides pudimos demostrar que un ángulo externo de un triángulo era mayor que cualquiera interno no adyacente (**36** ·3), y a esa proposición le llamábamos primer teorema del ángulo externo, del cual hemos hecho mucha aplicación. Ahora, que hemos agregado a los postulados anteriores el de Euclides, podemos precisar más, diciendo: *todo ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de los dos internos no adyacentes.*

En efecto, todo ángulo externo es suplemento del interno adyacente, y éste es también suplemento de la suma de los otros dos internos, luego el externo es igual a la suma de estos dos internos.

·3. *En todo triángulo rectángulo los ángulos agudos son complementarios;* pues su suma ha de valer un recto.

54. Suma de los ángulos de un polígono

·1. *La suma de los ángulos de un polígono convexo de* n *lados es igual a* (n − 2) *llanos*.

Pues descomponiendo el polígono en (n—2) triángulos por medio de diagonales que partan de un vértice (**45** ·1), la suma de los ángulos de todos los triángulos será igual a la suma de los ángulos del polígono, y como los de cada triángulo suman un llano, los de todos los triángulos sumarán (n—2) llanos.

·2. En particular, *la suma de los ángulos de un cuadrilátero es igual a dos llanos, o sea cuatro rectos.* Pues esa suma valdrá (4 - 2) llanos; lo cual se ve directamente trazando una diagonal.

55. Cuadriláteros especiales

·1. *Trapecio. Se llama trapecio a todo cuadrilátero que tiene dos lados paralelos y los otros dos no.* Los lados paralelos tienen que ser opuestos, y se llaman *bases*, llamándose *altura* a la distancia entre las bases que enseguida veremos, que es longitud única (fig. 76).

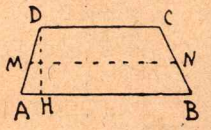


Fig. 76

La paralela a las bases, trazada por el punto medio de un lado no paralelo, se llama *paralela media*. Veremos que pasa por el punto medio del otro lado no básico.

·2 *Paralelogramo. Se llama paralelogramo a todo cuadrilátero que tiene dos lados opuestos paralelos, y los otros dos también.*

Se puede construir trazando dos rectas paralelas AB y CD (fig. 77), y por dos puntos A y B de una de ellas, trazando otras dos rectas, AD y BC, también paralelas, cada una de las cuales, por cortar a la AB, cortarán a su paralela CD; formándose evidentemente un cuadrilátero convexo, porque toda recta paralela a otra tiene todos

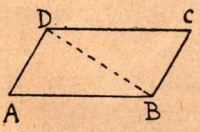


Fig. 77

sus puntos en el mismo semiplano respecto de esta otra (43).

Las propiedades primeras de los paralelogramos están condensadas en este teorema :

·3. *Si en un paralelogramo* ABCD *trazamos una diagonal* BD, *queda descompuesto en dos triángulos que son iguales en este orden :* $\overset{D}{A}\overset{B}{B} = \overset{B}{C}\overset{D}{D}$.

Pues tienen el lado BD igual al DB, y los ángulos adyacentes a este lado, respectivamente iguales, por alternos entre paralelas cortadas por la secante DB. Se deduce inmediatamente que : *en todo paralelogramo los lados opuestos son iguales*, pues $AB = CD$, $AD = BC$, *y los ángulos opuestos son iguales*, pues $\hat{A} = \hat{C}$ y $\hat{D} = \hat{B}$.

Es claro, que además, como los ángulos adyacentes a un mismo lado son conjugados (50), *serán suplementarios*.

·4. Y la propiedad fundamental de las diagonales se tiene en este otro teorema : *Las dos diagonales de un paralelogramo le dividen en cuatro triángulos iguales dos a dos; y por tanto, las diagonales se cortan en su punto medio.*

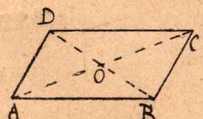


Fig. 78

Pues en la figura 78 podemos observar que se verifica por ejemplo, $\overset{O}{A}\overset{O}{B} = \overset{O}{C}\overset{O}{D}$ ya que tienen iguales AB y CD, por ser lados opuestos del paralelogramo y también tienen iguales los dos pares de ángulos adyacentes a esos lados, por ser alternos entre paralelas. Resulta de la igualdad de esos triángulos que es $OA = OC$ y $OB = OD$, luego O es el punto medio de las diagonales.

·5. *Criterios para reconocer si un cuadrilátero es paralelogramo.*

Un cuadrilátero convexo será un paralelogramo, si tiene :

a) *Un par de lados opuestos iguales y paralelos;*

b) *o los dos pares de lados opuestos iguales;*

c) *o los dos pares de ángulos opuestos iguales;*

d) *o las diagonales cortándose en su punto medio.*

Los dos primeros se demuestran observando que al trazar una diagonal, los dos triángulos que se forman son iguales, o

por tener iguales dos lados y el ángulo comprendido, o por tener iguales los tres lados. El tercero se demuestra observando que los ángulos adyacentes a un mismo lado tienen que ser suplementarios, porque esos dos ángulos son, respectivamente, iguales a los otros dos, y entre los cuatro ángulos han de sumar cuatro rectos.

Y el cuarto se demuestra viendo que los cuatro triángulos en que las dos diagonales dividen al cuadrilátero son iguales dos a dos, por tener iguales dos lados y el ángulo comprendido.

·6. *Equidistancia de las paralelas.* Las propiedades del paralelogramo conducen a este importante teorema: *las paralelas son rectas equidistantes.* Es decir, las distancias desde los puntos de una recta a una paralela a ella son todas iguales. Y en efecto, si tenemos dos rectas paralelas *a* y *b*, y tomamos en una de ellas la *a*, dos puntos M y N, las distancias desde M y N a la recta *b* son iguales, porque las perpendiculares a la recta *b*, trazadas de esos puntos, son paralelas y formarán un paralelogramo, en el cual esas dos distancias son lados opuestos, y por tanto, iguales (**50** ·8).

·7. *Se deduce de aquí que el lugar geométrico de los puntos de un plano cuyas distancias a una recta fija del mismo, es igual a una longitud dada, está constituído por dos rectas paralelas a la dada, situadas una en cada semiplano con respecto a ella, y trazadas por dos puntos cuya distancia a ella sea esa longitud* (52).

Pues se ve inmediatamente que todo punto, tal como el P (fig. 79), que pertenezca a una de esas paralelas dista de la recta dada *r*, la distancia dada *d*, y que todo punto, tal como el R o S que no esté en esas paralelas, dista de *r* más o menos que la distancia dada *d*.

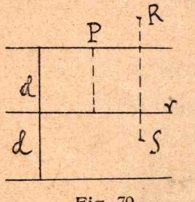


Fig 79

·8. *Base y altura de un paralelogramo.* A un lado cualquiera de un paralelogramo se le llama *base*, y a la distancia entre ese lado y el opuesto se le llama *altura* correspondiente a esa base.

La altura podemos trazarla por cualquier punto, porque las paralelas son rectas equidistantes. Lo mismo ocurre con la

distancia entre las bases del trapecio, que también se llama altura.

56. Paralelogramos especiales

·1. *Rombo. Todo paralelogramo que tenga iguales dos lados adyacentes, tiene iguales los cuatro lados, y se llama rombo.* Pues los otros lados son iguales, respectivamente, a los primeros, por ser lados opuestos de un paralelogramo.

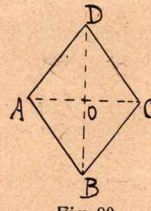


Fig. 80

Una diagonal del rombo le divide en dos triángulos isósceles iguales, y las dos diagonales le dividen en cuatro triángulos rectángulos iguales. Resulta de ello, que *las diagonales del rombo son perpendiculares.* Se pueden demostrar estas propiedades comparando primero los triángulos que forma una diagonal, que son iguales por tener los tres lados iguales $\overset{D}{AC} = \overset{B}{AC}$, y deduciendo de aquí la igualdad de los ángulos homólogos y la igualdad de los triángulos formados por las dos diagonales (fig. 80).

Un criterio para reconocer un rombo es el siguiente :
si un cuadrilátero convexo tiene los cuatro lados iguales, es rombo.

Pues una diagonal le dividirá en dos triángulos (fig. 80) iguales $\overset{D}{AC} = \overset{B}{CA}$, por lo cual los ángulos homólogos son iguales y los lados opuestos serán paralelos por formar ángulos alternos iguales con esa diagonal.

·2. *Rectángulo. Todo paralelogramo que tenga un ángulo recto tiene los otros tres ángulos también rectos, y se llama rectángulo.*

Pues los ángulos opuestos de un paralelogramo son iguales, y los adyacentes son suplementarios, y si uno es recto, lo serán los cuatro.

En el rectángulo, las diagonales son iguales; pues forman

con uno cualquiera de los lados del rectángulo, tal como el AB, dos triángulos iguales en este orden $\overset{D}{A}B = \overset{C}{B}A$, por ser triángulos rectángulos que tienen iguales los dos catetos (fig. 81).

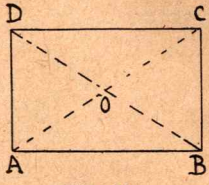


Fig. 81

Un criterio para reconocer un rectángulo es el siguiente : *Si un cuadrilátero convexo tiene tres ángulos rectos, y por consiguiente los cuatro, es un rectángulo.* Pues si tiene tres ángulos rectos, el cuarto también lo será, para que sumen entre todos cuatro rectos; y además el cuadrilátero es paralelogramo, porque cada dos ángulos opuestos son paralelos, por ser perpendiculares a uno de los otros lados.

También se pueden reconocer tanto el rombo como el paralelogramo por sus diagonales :

Si un cuadrilátero tiene sus diagonales cortándose en su punto medio y perpendiculares, es un rombo; y *si se cortan en su punto medio y son iguales, es un rectángulo.* Pues en el primer caso el cuadrilátero queda dividido en cuatro triángulos rectángulos iguales, y sus hipotenusas serán todas iguales, y será un rombo. Y en el segundo caso los triángulos formados por las dos diagonales con un lado del cuadrilátero, son iguales, por tener los tres lados iguales, y los ángulos adyacentes a dicho lado serán iguales; y como el cuadrilátero es desde luego paralelogramo, porque sus diagonales se cortan en su punto medio, esos ángulos iguales tendrán que ser suplementarios y por consiguiente rectos.

3. *Cuadrado. Un cuadrilátero, que es a la vez rectángulo y rombo, es decir, que tiene sus cuatro lados iguales y sus cuatro ángulos rectos, se llama cuadrado.* Cada diagonal le divide en dos triángulos rectángulos e isósceles, y sus ángulos agudos son, por tanto, de 45°. Y las dos diagonales le dividen en cuatro triángulos rectángulos e isósceles. Las diagonales son perpendiculares e iguales (fig. 82).

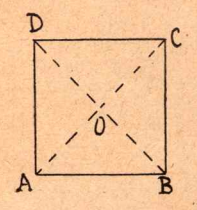


Fig. 82

Y para reconocer si un cuadrilátero es cuadrado se ve si es rombo y rectángulo.

Ejercicios

Razonar con detalle las propiedades de los cuadriláteros, utilizando diversos procedimientos de demostración.

LECCION 10

CIRCUNFERENCIA DE CÍRCULO

57. La circunferencia y sus elementos

·1. *Definición. Se llama circunferencia el lugar geométrico de los puntos de un plano cuya distancia a un punto del plano, llamado centro, es igual a la longitud de un segmento, llamado radio.*

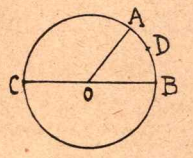


Fig. 83

·2. *Radios.* En toda semirrecta que parta del centro, hay un punto y uno solo cuya distancia al centro es igual al radio (**25** ·3), luego habrá en ella un punto y uno solo de la circunferencia. A estos segmentos que parten del centro y terminan en la circunferencia, considerados, no solo en magnitud, sino en posición, se les llama los *radios* de esa circunferencia : OA, OB, etc. (fig. 83).

·3. *Diámetros.* Toda recta que pase por el centro quedará dividida por éste en dos semirrectas, luego tendrá comunes con la circunferencia dos puntos y solo dos, uno en cada semirrecta, y el segmento que los une se llama *diámetro*, el cual será igual a dos radios : $CB = OB + OC$.

·4. *Círculo.* La circunferencia divide al plano en dos regiones, sin puntos comunes fuera de ella; la una región está formada por los puntos de la circunferencia y los interiores a ella, que son los que distan del centro menos que el radio; y la otra está formada por los puntos de la circunferencia y los exteriores, o sea los que distan del centro más que el radio. La primera región formada por la circunferencia y sus puntos interiores se llama *círculo*. Se demuestra lo dicho viendo que toda semirrecta que parte del centro, es dividida por el punto común con la circunferencia, en dos partes.

·5. *Compás.* Para trazar circunferencias o partes de ella se usa un instrumento llamado *compás*, por todos conocido.

Para construir con él una circunferencia determinada es preciso y suficiente que se conozcan, o se puedan hallar, el centro y el radio. Un problema de Geometría se considera gráficamente resuelto cuando se saben construir las figuras que se piden por medio de un número finito de operaciones, hechas solamente con la regla y el campás.

·6. *Arcos.* Dos puntos cualesquiera de una circunferencia la dividen en dos partes, llamadas *arcos*, que se determinan trazando desde el centro los rayos que pasan por esos puntos, y considerando los dos ángulos cuyos lados son esos rayos. Los puntos de uno de los arcos son los puntos de la circunferencia que están en los infinitos rayos que constituyen uno de esos ángulos. Así, los puntos A y B (fig. 83), limitan dos arcos, el uno el ADB, formado por los puntos de la circunferencia que están en los rayos del ángulo convexo AOB, y el otro el ACB, correspondiente al ángulo cóncavo AOB (22).

Los puntos A y B se llaman extremidades o extremos de los arcos. Cuando los extremos de un arco están en línea recta con el centro, el arco se llama *semicircunferencia*. Los extremos de un diámetro dividen, pues, a la circunferencia en dos semicircunferencias, y el mismo diámetro divide al círculo en otras dos partes llamadas *semicírlos*, formado cada uno por los puntos del círculo que están en un mismo semiplano respecto del diámetro (8).

58. Posiciones relativas de una recta y una circunferencia

·1. Una recta y una circunferencia de su plano pueden ocupar estas tres posiciones solamente, que mutuamente se excluyen :

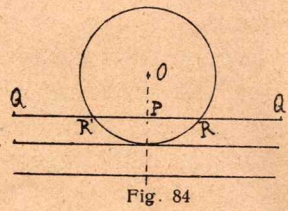


Fig. 84

o la distancia del centro a la recta es mayor que el radio, o es igual al radio, o es menor que el radio.

Si esa distancia es mayor que el radio, la recta tiene todos sus puntos exteriores a la circunfe-

rencia, y se llama exterior. Pues el pie de la perpendicular trazada desde el centro a la recta será exterior, y con mayor razón lo serán los demás puntos, que serán pies de oblicuas, las cuales son mayores que la perpendicular (51).

Si esa distancia es igual que el radio, la recta tendrá un punto en la circunferencia, y los demás exteriores a ella, y se llama tangente. Pues el pie de la perpendicular trazada desde el centro a la recta, dista del centro una longitud igual al radio, y estará, por tanto, en la circunferencia, mientras que los demás puntos distan más que el radio y serán exteriores.

Y si esa distancia es menor que el radio, la recta tiene puntos interiores a la circunferencia, puntos exteriores, y dos puntos en la misma circunferencia, llamándose secante. Pues el pie de la perpendicular, trazada desde el centro a la recta, dista del centro menos que el radio, y será interior a la circunferencia; la recta tiene también puntos exteriores a la circunferencia en cada una de las semirrectas en que dicho pie divide a la recta, pues tomando en esas semirrectas segmentos iguales al diámetro, tales como PQ (fig. 84), los puntos Q distarán del centro una longitud mayor que el radio, ya que OQ es hipotenusa de un triángulo rectángulo que tiene uno de sus catetos igual al diámetro; y por fin, se demuestra que la recta tiene dos puntos en la circunferencia, situados uno en cada semirrecta, fundándose en el postulado de continuidad (6 ·2). Se clasifican para ello los puntos de la semirrecta en dos clases, la una formada por los que son interiores a la circunferencia y la otra por los demás, y entonces, un razonamiento, que no detallamos por razones de brevedad, demuestra que existe un punto de separación de las dos clases, el cual está en la misma circunferencia.

·2. *Recíprocos.* Como las conclusiones de los teoremas anteriores también se excluyen, sus recíprocos son ciertos (41 ·2), por tanto : *si una recta es exterior, su distancia al centro es mayor que el radio; si es tangente, es igual al radio, y si es secante, es menor que el radio.* Apliquemos el directo y el recíproco a la tangente :

·3. *Teorema de la tangente. Para que una recta sea tan-*

gente a una circunferencia, es condición necesaria y suficiente que sea perpendicular a un radio en su extremo. Pues entonces, y solo entonces, la distancia al centro es igual al radio.

59. Distancias de los puntos de una circunferencia a un punto de su plano

Consideremos una circunferencia de centro O y un punto P en su plano, y vamos a hallar las relaciones entre las distancias del punto P a los puntos de la circunferencia.

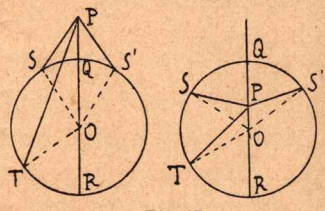


Fig. 85

Para ello nos fijamos en los rayos que parten del centro, y se verifica:

a) *el rayo que pasa por* P, *o sea el* OP, *contiene a la distancia mínima;* pues en el triángulo OPS, un lado PS, es mayor que la diferencia entre los otros dos, que es igual a PQ (fig. 85) (**40** · 2);

b) *el rayo opuesto al* OP *pasa por el punto de distancia máxima;* pues en el mismo triángulo POS, el lado PS es menor que la suma de los otros dos, que es igual a PR;

c) *si dos rayos forman ángulos iguales con el* OP *pasan por puntos que equidistan de* P; pues los dos triángulos que se forman, PSO y PS'O, por ejemplo, son iguales por tener iguales dos lados y el ángulo comprendido; luego será PS = PS';

d) *si dos rayos forman ángulos desiguales con* OP, *el que mayor ángulo forma pasa por el punto que más dista de* P; pues se forman dos triángulos, PTO y PS'O, por ejemplo, que tienen iguales dos pares de lados y desigual el ángulo comprendido, y la misma relación de desigualdad que haya entre estos ángulos comprendidos existirá entre los terceros lados, por lo cual es PT > PS (42).

Los recíprocos son ciertos según el principio segundo de inversión (**41** · 2)

60. Posiciones relativas de dos circunferencias

·1. *Dos circunferencias de radios distintos situadas en un plano pueden ocupar cinco posiciones, que se excluyen mutuamente.* Suponiendo que es *d* la distancia entre los centros, y (R, r) los radios mayor y menor, será :

$$d > R + r;\ \text{ó}\ d = R + r;\ \text{ó}\ d < R + r,\ \text{pero}\ d > R - r;$$
$$\text{ó}\ d = R - r;\ \text{ó}\ d < R - r;\ \text{es decir :}$$

la distancia entre los centros puede ser mayor que la suma de los radios; o igual; o menor que la suma, pero mayor que la diferencia de los radios; o igual que esa diferencia; o menor que ella. Si los radios son iguales no hay más que *tres* posiciones de esas.

a) *Si es* $d > R + r$, *todos los puntos de una cualquiera de las circunferencias son exteriores a la otra, y esas circunferencias se llaman exteriores.* Pues los diámetros AB y MN, situados en la recta de los centros, no tendrán ningún punto común, ya que es por hipótesis $OO' > OB + O'M$ (fig. 86); y como se verifica para cualquier punto S de la circunferencia de centro O, que es $OS > OM > OB$ (59), todos los puntos de una de las circunferencias son exteriores a la otra.

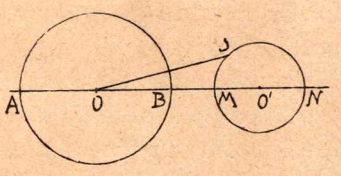


Fig. 86

b) *Si es* $d = R + r$, *las dos circunferencias tienen un solo punto común, que está en la recta de los centros, siendo los otros puntos de una cualquiera de las circunferencias exteriores a la otra, y las dos circunferencias se llaman tangentes exteriormente.*

Pues los dos diámetros que hay en la recta de los centros deberán tener un solo punto común, el extremo M, para que se

verifique (fig. 87), OO' = OM + MO'. Las dos circunferencias tienen, pues, un punto común en la recta de los centros; pero los demás puntos de la una, tal como el S, son exteriores a la otra, ya que se verifica OS > OM (59). Obsérvese, además, que la recta perpendicular a la que pasa por los centros, trazada por el punto común M, de contacto de las dos circunferencias, es tangente común a ambas circunferencias (**58** ·3).

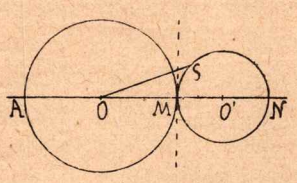


Fig. 87

c) *Si es* d < R + r, *pero* d > R — r *las dos circunferencias tienen dos puntos comunes, que dividen a cada una en dos arcos, siendo los demás puntos del uno interiores a la otra circunferencia, y los del otro exteriores; entonces las circunferencias se llaman secantes, y la cuerda común tiene por mediatriz a la recta de los centros.*

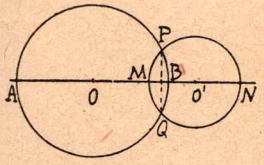


Fig. 88

Pues entonces los diámetros situados en la recta de los centros, o sea los AB y MN deberán tener un segmento común, MB, pero los otros dos extremos estarán en las prolongaciones de este segmento, para que sea OO' < OB + MO' y OO' > > OB — MO' (fig. 88).

Esto nos dice que la circunferencia O', por ejemplo, tiene un punto M en el interior de la otra, pues es OM < OB, y otro punto N en el exterior, pues es ON > OB, pero las distancias desde O a los puntos de esa circunferencia van creciendo desde la OM hasta la ON (59), y aplicando el principio de continuidad a los ángulos de vértice O', podemos demostrar, aunque no lo hacemos, por brevedad, que existe uno de ellos, que es el $P\hat{O}'M$, para el cual es OP = OB, y otro en la región opuesta, o sea el relativo al punto Q (**28** ·3). Y como todos los puntos del arco PMQ, excepto los extremos, distan de O menos que B, serán interiores a la circunferencia de centro O, y los del arco PNQ, excepto los extremos, serán exteriores. Por fin, al

ser O y O' puntos equidistantes de P y Q, la recta PQ será mediatriz del segmento PQ (52).

d). *Si es* $d = R - r$ *las dos circunferencias tienen un solo punto común, estando todos los demás puntos de la circunferencia de menor radio en el interior de la otra; las circunferencias se llaman entonces tangentes interiormente, y el punto de contacto está en la recta de los centros.* En efecto, los diámetros deben tener entonces un extremo común, y el menor debe estar contenido en el mayor, para que sea OO' = OB — O'B (figura 89), resultando entonces que las circunferencias tienen por punto común dicho extremo B, que está en la recta de los centros; pero los demás puntos de la circunferencia menor distan del centro de la otra una longitud menor que el radio de esta otra, luego son interiores a ella (59).

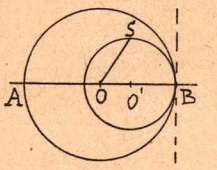


Fig. 89

e). *Si se verifica* $d < R - r$ *todos los puntos de la circunferencia de menor radio son interiores a la otra, y se dice interior a ésta.* Pues el diámetro de esa circunferencia pequeña tiene que estar contenido en el diámetro de la otra, para que sea (fig. 90) OO' < OB — O'N; y por tanto, es ON < OB y con mayor razón todos los demás puntos de la menor estarán dentro de la mayor (59).

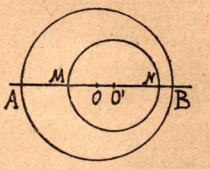


Fig. 90

Como las conclusiones de los cinco teoremas se excluyen, también los recíprocos serán ciertos. Apliquemos los directos y recíprocos a las circunferencias tangentes:

2. *Para que dos circunferencias sean tangentes, es condición necesaria y suficiente que tengan en la recta de los centros un punto común, que será el de contacto.* Pues entonces y solo entonces, la distancia entre los centros es igual a la suma o diferencia de los radios.

61. Aplicaciones a la resolución de problemas gráficos

·1. La resolución de problemas gráficos con la regla y el compás debe reducirse en definitiva a la resolución de estos dos problemas generales: *Trazar una recta por dos puntos dados*, lo cual se hace con la regla; y *trazar una circunferencia dado el centro y el radio*, lo cual se hace con el compás. La aplicación repetida de estas dos operaciones debe conducir a la resolución del problema que se sabe resolver con dichos instrumentos.

He aquí algunos problemas fundamentales:

·2. *Trazar la mediatriz de un segmento dado* AB (fig. 91).

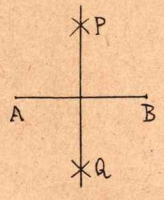


Fig. 91

Haciendo centro en los extremos del segmento, y con un radio manifiestamente mayor que la mitad del segmento, se trazan dos circunferencias o partes de ellas, las cuales se cortarán en dos puntos, porque al ser la distancia entre los centros menor que la suma de los radios y mayor que su diferencia, serán secantes (60); y la recta que une los puntos de intersección, P y Q, será la mediatriz.

En efecto, P y Q equidistan de A y B, luego están en la mediatriz de AB (**52** ·2); y como no pasa más que una recta por dos puntos, la recta PQ será dicha mediatriz. También se demuestra por igualdad de triángulos.

·3. *Trazar la bisectriz de un ángulo*, AOB (figura 92).

Tomando dos segmentos iguales en los lados, OA = OB, el problema se reduce a trazar la mediatriz del segmento AB, sin necesidad de trazar el segmento ni de hallar más que un punto de ella; pues se conoce el O, que ya pertenece a la mediatriz, por equidistar de A y B.

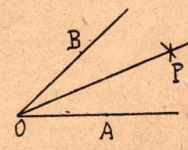


Fig. 92

En efecto, la mediatriz del segmento AB es bisectriz del ángulo AOB, porque al ser mediatriz es perpendicular al segmento AB, y las oblicuas iguales OA y OB forman ángulos iguales

con la perpendicular (**51** ·2). También se demuestra por igualdad de triángulos.

·4. *Trazado de la perpendicular a una recta por un punto dado.*

Si el punto está en la recta, el problema se reduce a tomar dos puntos en la recta que estén a igual distancia del punto dado, y trazar luego la mediatriz del segmento que determinan.

Y si el punto está fuera de la recta, se hace centro en él, y con un radio manifiestamente mayor que la distancia desde el punto a la recta se traza una circunferencia o parte de ella, la cual cortará a la recta en dos puntos, puesto que es secante (**58** ·1). La mediatriz del segmento determinado por estos dos puntos será la perpendicular pedida; pues pasa por el punto dado, ya que éste equidista de los extremos de dicho segmento.

También se pueden trazar perpendiculares con la *escuadra*, que es un instrumento que tiene dos bordes rectilíneos formando ángulo recto. Veremos más adelante otros métodos para trazarlas.

·5. *Trazar la paralela a una recta por un punto dado.*

Lo más fácil es determinar el cuarto vértice de un paralelogramo o un rombo que tiene uno en el punto dado y otros dos en la recta.

Y así, para trazar la paralela a una recta *p* por un punto A (fig. 93), tomaremos dos puntos B y C en la recta, y teniendo en cuenta que debe formarse un *paralelogramo*, llevaremos la distancia BC a partir de A, haciendo centro con el compás en A, y trazando un arco con el radio BC; de igual manera se lleva BA, a partir de C, trazando otro arco, que cortará al anterior en un punto P, el cual, unido con A, nos da la paralela. En efecto, el cuadrilátero BCPA es un paralelogramo, pues al trazar una diagonal, tal como la AC, se forman dos triángulos iguales en este orden $\overset{A}{BC} = \overset{C}{PA}$ por tener los tres lados respectivamente iguales; luego los ángulos homólogos son iguales, y los lados opuestos del cuadrilátero serán

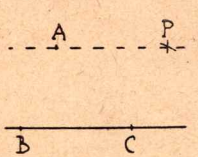


Fig. 93

paralelos, por formar ángulos alternos iguales con la secante AC (50).

En vez de tomar los puntos B y C a capricho, podemos tomar primero el B, y luego el C, de manera que sea BA = BC, con lo cual se nos formará un paralelogramo que es *rombo*, por tener los cuatro lados iguales. Se encuentra la ventaja de no tener que mudar el radio en el compás; pero el método del paralelogramo es preferible al del rombo cuando el punto está muy cerca de la recta.

También se pueden trazar paralelas con *la regla* y *la escuadra*, deslizando sobre el borde de la regla uno de los bordes de la escuadra, el otro irá ocupando posiciones paralelas entre sí, porque forman ángulos correspondientes iguales con el borde de la regla que se conserva fija.

Ejercicios

Demuéstrense por igualdad de triángulos los problemas sobre la mediatriz, la bisectriz y las perpendiculares.

LECCIÓN 11

PROPIEDADES DE ARCOS Y CUERDAS

62. Circunferencias que pasan por tres puntos

·1. *Caso de puntos no alineados. Por tres puntos que no están en línea recta pasa una circunferencia y solo una.* Sean los puntos no alineados A, B y C (fig. 94). El lugar geométrico de los puntos que equidistan de A y B es la mediatriz del segmento AB (52), y el de los puntos que equidistan de B y C es la mediatriz del segmento BC.

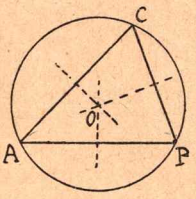


Fig. 94

Estas dos mediatrices son perpendiculares a dos rectas que se cortan, luego también ellas se cortan (**50** ·7) en un punto que llamaremos O. Si llamamos *r* a la distancia desde O hasta A, también será *r* la distancia desde O hasta B, y la distancia desde O hasta C; luego la circunferencia que pase por A y tenga su centro en O, pasará también por B y C. Y no puede haber otra que pase por los tres puntos, porque su centro tendría que equidistar de los tres, y estar, por tanto, en las dos mediatrices de AB y BC, las cuales no tienen más que un punto común, el O.

·2. *Caso de tres puntos alineados. Por tres puntos que estén en línea recta no pasa ninguna circunferencia.* Pues las mediatrices de los segmentos que los unen son paralelas (**50** ·8).

·3. De los razonamientos hechos se deducen estas consecuencias :

a) *Por dos puntos* A *y* B, *y en un plano que los contiene, pasan infinitas circunferencias, siendo el lugar geométrico de sus centros la mediatriz del segmento* AB.

b) *Por los tres vértices de un triángulo pasa una circunferencia y solo una*, que se llama *circunscrita* al triángulo, diciéndose que el triángulo está *inscrito* en ella; su centro es el punto de concurso de las tres mediatrices de los lados, y se llama *circuncentro*.

63. Circunferencias tangentes a tres rectas

1. *Caso de tres rectas que formen triángulo. Si tres rectas forman triángulo, es decir, se cortan dos a dos, existen cuatro circunferencias tangentes a ellas; siendo una, tangente a los tres lados, la cual tiene su centro en el punto de concurso de las bisectrices interiores; y siendo cada una de las otras, tangentes a un lado y a la prolongación de los otros dos, y teniendo su centro en el punto de concurso de la bisectriz interior del ángulo opuestos a ese lado, y de las bisectrices exteriores de los otros ángulos* (fig. 95).

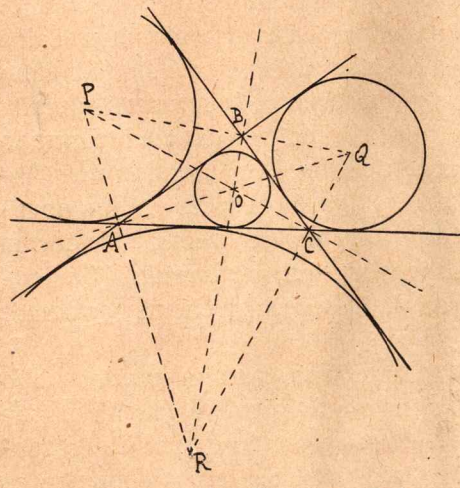


Fig. 95

En efecto, trazando las tres bisectrices interiores y las tres exteriores del triángulo (**32** ·2) se observará que cada dos que no parten de un mismo vértice se tienen que cortar, precisamente, del lado en que la suma de los ángulos conjugados que forman con uno de los lados, es menor que dos rectas (**50** ·4). Además, el punto O en que se cortan dos bisectrices interiores, pertenece también a la tercera bisectriz, porque equidista de los tres lados del triángulo (**52** ·3), llamándose *incentro*, porque es el centro de una circunferencia única tan-

gente a los tres lados, que se llama *inscrita* en el triángulo ABC, el cual se dice circunscrito a ella. Asímismo, el punto donde se encuentran dos bisectrices exteriores, de dos ángulos, pertenece también a la bisectriz interior del tercer ángulo, pues dicho punto equidista de las prolongaciones de dos lados y del tercer lado; siendo, por tanto, centro de una circunferencia única, tangente a las prolongaciones de esos dos lados y a ese tercer lado, circunferencia que se llama *exinscrita* al triángulo ABC; habrá, pues, una circunferencia inscrita y tres exinscritas. Los tres centros de las circunferencias exinscritas, P, Q y R, son los vértices de un triángulo, circunscrito al dado ABC, siendo las bisectrices de éste alturas del primero, las cuales se encuentran en O, incentro de ese triángulo dado; punto que se llama también *ortocentro* del otro triángulo PQR, por ser punto de concurso de sus tres alturas.

·2. *Caso de tres rectas, dos de las cuales son paralelas, y la tercera las corta.* En este caso hay dos circunferencias tangentes a las tres rectas (fig. 96). En efecto, el lugar geométrico de los puntos equidistantes de dos de las rectas está formado por las bisectrices de los ángulos que forman (**52** ·3), y las bisectrices de los ángulos formados por las tres rectas, se cortan en los vértices de un rectángulo (**31** ·6), dos de los cuales son centros de las circunferencias tangentes a las tres rectas.

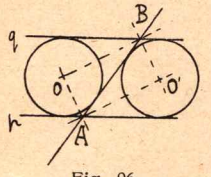


Fig. 96

·3. *Caso de tres rectas paralelas o concurrentes. No hay entonces circunferencia que sea tangente a las tres.* Se demuestra en el caso de paralelas observando que el lugar geométrico de los puntos equidistantes de dos rectas paralelas es otra recta paralela a ellas, y trazada por un punto situado entre las dos a igual distancia de ambas (**55** ·7).

64. Propiedades gráficas de los arcos de circunferencia.

Tales propiedades son consecuencia de las de los ángulos (23), pues ya sabemos que un arco se define por medio del ángulo (**57** ·6).

·1. *Todo punto interior a un arco le divide en dos arcos que son partes de él y que no tienen común más que ese punto.*

·2. *Dos puntos interiores a un arco forman otro arco parte del dado.*

·3. *En un arco o en una circunferencia se pueden considerar dos órdenes naturales o sentidos opuestos uno de otro.*

·4. *Entre los arcos de una circunferencia se verifica el principio de continuidad, enunciado debidamente.*

Todas se demuestran inmediatamente considerando los ángulos en el centro correspondientes, y aplicándoles las propiedades análogas.

65. Propiedades métricas de los arcos de circunferencia.

·1. *Si dos arcos tienen radios iguales y ángulos en el centro también iguales, ellos mismos son iguales.* Supongamos, en efecto, dos arcos AB y A'B' (fig.97), para los cuales suponemos se verifica por hipótesis: OA=O'A' y $A\hat{O}B = A'\hat{O}'B'$. Para ver que los arcos son iguales, hagamos corresponder al punto A el A', al punto B el B', y a todo punto tal como elC otro punto C', tal que sea $A'\hat{O}'C' = A\hat{O}C$ y $B'\hat{O}'C' = B\hat{O}C$. Podemos ver entonces que el segmento determinado por dos pun-

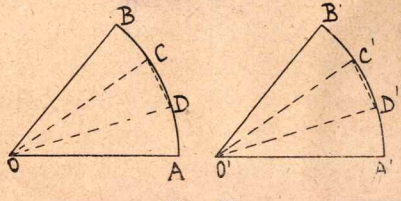


Fig. 97

tos del primer arco, tales como el C y D es igual al segmento C'D' determinado por los puntos correspondientes, puesto que los triángulos COD y C'O'D' son iguales, por tener iguales los ángulos en O y O' y los lados que los forman; los dos arcos son por tanto iguales (**46** ·1).

·2. La misma demostración es aplicable a las *circunferencias de radios iguales, que son también iguales;* tomando como puntos de referencia dos puntos A y B en la una, y A' y B' en la otra, que formen arcos iguales.

Y asímismo, llamando *sector circular* a la porción de círculo limitada por un arco y los radios que van a parar a sus extremos, se podrá demostrar en forma análoga que *dos sectores circulares de igual radio y de igual ángulo en el centro son iguales;* y aún que *dos círculos de igual radio son iguales;* pudiéndose en ambos casos establecer la correspondencia puntual como dijimos para los ángulos iguales (**46** ·1).

·3. *Teoremas recíprocos. Si dos arcos de circunferencia son iguales, sus radios son iguales y sus ángulos en el centro también.*

Supongamos, en efecto, dos arcos de circunferencia AB y A'B', que por hipótesis suponemos que son iguales, es decir, que entre sus puntos se puede establecer una correspondencia biunívoca tal que los segmentos cuyos extremos son homólogos, son segmentos iguales. Entonces, tres puntos cualesquiera, M, N y P de uno de los arcos (fig. 98) formarán un triángulo, que es igual al M'N'P' formado por sus homólogos, puesto que los dos triángulos tienen los tres lados respectivamente iguales. Siendo iguales los triángulos, fácil es ver que son iguales los radios de las circunferencias circunscritas (62), lo que prueba que los dos arcos AB y A'B' *tienen radios iguales*. Y para ver que tienen también *ángulos en el centro iguales* basta observar que si un punto N de uno

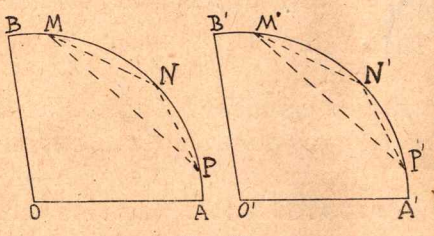


Fig. 98

de los arcos está entre otros dos M y P, su homólogo N' está entre sus homólogos M' y P', lo que demuestra que a los extremos A y B de uno de los arcos les debe corresponder los extremos A' y B' del otro, luego los segmentos AB y A'B' son iguales, y lo serán los triángulos AOB y A'O'B', y finalmente los ángulos AOB y A'O'B'.

La demostración se extiende a las circunferencias, las cuales para ser iguales es necesario que tengan sus radios iguales; y a los sectores circulares, que para ser iguales han de tener sus radios iguales y sus ángulos en el centro también iguales; y a los círculos, que para ser iguales han de tener sus radios iguales.

·4. *Amplitudes de los arcos.* Entre los arcos de igual radio se puede definir una magnitud que permite compararlos y medirlos, tomando para ello como arcos equivalentes los que son geométricamente iguales; definiendo luego la suma de arcos en la misma forma que se define la suma de segmentos o de ángulos, y viendo luego que se verifican las propiedades métricas que determinan una magnitud medible, como vimos para los segmentos y ángulos. Pero acabamos de ver que a arcos iguales corresponden ángulos en el centro también iguales y recíprocamente, y por otra parte, la misma definición de arco nos enseña que a un arco suma de otros dos corresponde un ángulo suma de los correspondientes a aquellos dos, propiedades ambas que se expresan analíticamente diciendo que *los arcos del mismo radio son proporcionales a sus ángulos en el centro correspondientes* (Aritmética).

Pero aún así, no podríamos comparar y medir dos arcos de distinto radio, porque hemos visto que no pueden ser nunca iguales, y para poderlo efectuar se conviene en hacer corresponder a cada arco una determinada longitud y una determinada amplitud; es decir, a cada arco se le hace corresponder un segmento de longitud determinada, y un ángulo de amplitud determinada. Dejando para más adelante el estudio de las longitudes de los arcos, vamos a definir ahora la amplitud.

Se llama amplitud de un arco de radio cualquiera a la amplitud de su ángulo en el centro correspondiente (**25** ·5).

De aquí resulta que la circunferencia tendrá 360° cualquiera que sea su radio; la semicircunferencia tendrá 180°; el cuadrante, o sea el arco que es cuarta parte de la circunferencia, tendrá 90°; el sextante, o sea el arco que es sexta parte de la circunferencia, tendrá 60°, etc. Y resulta de las propiedades anteriores que dos arcos iguales tienen igual amplitud, y dos arcos que tengan la misma amplitud e iguales radios son iguales.

66. Propiedades de las cuerdas y de los diámetros

·1. En toda circunferencia se llama *cuerda* a todo segmento que une dos puntos de la circunferencia.

Según esto, *todo diámetro es una cuerda, y es mayor que cualquier otra cuerda de la misma circunferencia que no sea diámetro*. Pues uniendo los extremos de cualquier cuerda que no pase por el centro, con dicho centro se forma un triángulo, en el cual la cuerda es un lado menor que la suma de los otros dos, que suman un diámetro.

Los extremos de una cuerda dividen a la circunferencia en dos arcos; de ellos, el que es menor, o cuando más igual, a una semicircunferencia, se llama *arco correspondiente a la cuerda*, o arco subtendido por la cuerda.

Toda cuerda divide al círculo en dos partes, situadas en distinto semiplano respecto de la recta que contiene a la cuerda; a cada una de esas dos partes se le llama *segmento circular*.

·2. *Mediatriz de una cuerda. La mediatriz o eje de simetría de una cuerda es una recta que cumple estas cinco condiciones, tales que verificándose dos cualesquiera de ellas se verifican las otras tres:*

a) *es perpendicular a la cuerda;*

b) *pasa por su punto medio;*

c) *pasa por el centro de la circunferencia;*

d) *divide en dos partes iguales al arco subtendido por la cuerda;*

e) *divide también en dos partes iguales al otro arco de-*

terminado por los extremos de la cuerda. En efecto, si la cuerda es un diámetro, la demostración del teorema es inmediata.

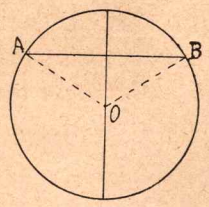


Fig. 99

Y si no es un diámetro, uniendo los extremos de la cuerda con el centro O, de la circunferencia, se forma un triángulo isósceles, OAB (figura 99), en el cual la mediatriz de la base es perpendicular a ella, pasa por su punto medio, pasa por el vértice opuesto a la base, es bisectriz del ángulo convexo formado en ese vértice, y es bisectriz del ángulo cóncavo del mismo vértice (**36** ·2). De lo cual se deduce que la mediatriz de la cuerda cumple las cinco condiciones del enunciado. Pero esas condiciones se reducen a que la recta esa sea perpendicular a la cuerda, y pase por cuatro puntos : el centro, y los puntos medios de la cuerda y los arcos; y como una recta queda determinada por dos puntos, o queda determinada en cuanto se nos dé un punto y otra recta a la cual ha de ser perpendicular, resulta que dos cualesquiera de esas cinco condiciones del enunciado, determinan la mediatriz, la cual cumplirá también las otras tres.

Como caso particular muy importante se tiene este teorema:

El diámetro perpendicular a una cuerda divide en dos partes iguales a la cuerda y a los arcos limitados por sus extremos. Pues cumple dos de las condiciones : la de pasar por el centro, y ser perpendicular a la cuerda.

67. Relaciones entre arcos y cuerdas

·1. En una misma circunferencia, o en circunferencias iguales, *a arcos iguales corresponden cuerdas iguales, y a mayor arco corresponde mayor cuerda.* Siempre en el supuesto de que se trata de arcos que no exceden de una semicircunferencia.

En efecto, si dos arcos, tales como el AB y el MN (fig. 100),

son iguales, sus ángulos centrales correspondientes serán iguales, y los triángulos OAB y OMN serán iguales por tener iguales los ángulos en O y los lados que los forman, luego las cuerdas AB y MN, son iguales.

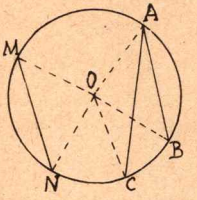


Fig. 100

Y si un arco AC es mayor que otro MN, se podrá tomar dentro del AC un arco AB igual al MN, al cual le corresponde una cuerda AB igual a la cuerda MN; pero uniendo los extremos B y C con el centro O, se forma un cuadrilátero cruzado (**40** ·3), y la suma de los lados que se cortan, o sea AC + OB, es mayor que la suma de los lados que no se cortan, o sea AB + OC, y quitando a esas sumas, una misma longitud, que es el radio de la circunferencia, queda AC > AB, o sea AC > MN.

Es también consecuencia inmedia del teorema (42).

·2. Los recíprocos son ciertos en virtud del segundo principio de inversión, por tanto, *a cuerdas iguales corresponden arcos iguales, y a mayor cuerda corresponde mayor arco* (**41** ·2).

68. Relación entre las cuerdas y sus distancias al centro.

·1. *Si dos cuerdas de una circunferencia son iguales, distan lo mismo del centro, y si dos cuerdas son desiguales, la mayor dista menos del centro que la otra.*

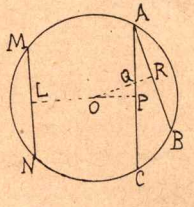


Fig. 101

En efecto, si las cuerdas son iguales, tales como las MN y AB (fig. 101), sus distancias al centro son catetos de dos triángulos rectángulos, que son iguales por tener iguales las hipotenusas y los otros catetos. Y si dos cuerdas son desiguales, tales como la AC y MN, siendo AC > MN será también el arco AC mayor que el MN (**67** ·2), y podremos tomar dentro del arco AC uno AB, igual al MN, sien-

do la cuerda AB igual a la MN, y distando del centro lo mismo que ella.

Pero trazando las distancias desde el centro a las cuerdas AC y AB se ve que la distancia a la AC es menor que la distancia a la AB, porque la perpendicular OP es menor que la oblicua OQ, y con mayor razón es menor que la distancia : OR = OL.

·2. Los recíprocos serán ciertos en virtud del segundo principio de inversión, luego *las cuerdas equidistantes del centro son iguales, y las cuerdas que menos distan del centro son las mayores.*

69. Aplicaciones a problemas gráficos

La igualdad entre arcos, cuerdas y ángulos en el centro, se presta a muchas aplicaciones del dibujo.

·1. Para *trazar ángulos iguales*, basta trazar arcos iguales, y para ello basta trazar cuerdas iguales en circunferencias de igual radio.

·2. Para *sumar o restar ángulos*, basta sumar o restar sus arcos trazados con el mismo radio.

·3. Para *construir un triángulo, cuando se nos da un lado y dos ángulos adyacentes*, basta trazar un segmento igual al lado, y en sus extremos trazar dos ángulos iguales a los dados y en posición conveniente (35).

·4. Para *construir un triángulo, cuando se nos den dos lados y el ángulo comprendido*, basta trazar un ángulo igual al dado, y en sus lados tomar dos segmentos iguales a los lados que se nos dan; uniendo los extremos libres de estos segmentos se tendrá el triángulo (36).

·5. Para *construir un triángulo, dados los tres lados*, basta trazar un segmento igual a uno de los lados y hacer centro en cada uno de sus extremos con un radio igual a cada uno de los otros lados; trazando de esa manera dos circunferencias o partes de ellas, si son secantes, los puntos de intersección nos darán los vértices terceros de dos triángulos iguales, que resuelven el problema. Las circunferencias no se cortarán, ni habrá trián-

gulo, cuando algún lado sea igual o mayor que la suma de los otros dos (37 y 40).

·6. Para *construir un triángulo, cuando se nos da un lado, el ángulo opuesto y un ángulo adyacente*, basta hallar el tercer ángulo, que es el suplemento de la suma de los otros dos, y queda reducido el problema al caso de dar un lado y los ángulos adyacentes (38).

·7. Y cuando se nos dan *un ángulo, el lado opuesto y un lado adyacente*, se construye un ángulo igual al lado, se toma en uno de sus lados el lado adyacente que se nos ha dado, y con radio igual al otro lado se hace centro en el extremo libre del lado construído y se traza una circunferencia o parte de ella; si esta circunferencia encuentra al otro lado del ángulo construído, el punto de encuentro, o los puntos de encuentro, según los casos, nos dan la solución o soluciones del problema, que pueden ser dos, una o ninguna. (Veáse párrafo 39 y figura 255).

Ejercicios

Resuélvanse, prácticamente, todos estos casos y discútanse, sobre todo, el último.

LECCIÓN 12

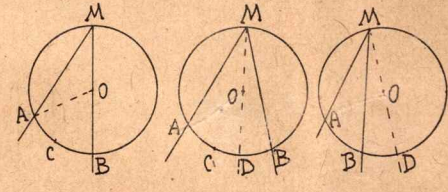
ANGULOS EN LA CIRCUNFERENCIA

70. Angulo inscrito en una circunferencia

·1. *Angulos centrales.* Hasta ahora no hemos considerado en el plano de una circunferencia más ángulos que los que tiene su vértice en el centro, los cuales se llaman *ángulos centrales;* y decíamos que su amplitud se llamaba también amplitud del arco correspondiente (**65** ·4), es decir, del arco formado por los puntos de la circunferencia situados en alguno de los infinitos rayos que constituyen el ángulo (**57** ·6). A ese arco se le llama también arco interceptado por el ángulo, o arco abrazado por los lados del ángulo.

·2. *Angulo inscrito. El ángulo convexo determinado por dos cuerdas que parten de un mismo punto de una circunferencia, se dice que está inscrito en la circunferencia.*

Y así, en la figura 102, el ángulo convexo AMB se dice inscrito en la circunferencia. Precisando más, se dice que el ángulo AMB está inscrito en el arco AMB, y al otro arco que tiene los mismos extremos, o sea al ACB, cuyos puntos están situados en alguno de los infinitos rayos del ángulo inscrito, se le llama arco interceptado por ese ángulo, o arco abrazado por los lados del ángulo.



Ftg. 102

·3. *Amplitud de un ángulo inscrito. La amplitud de un*

ángulo inscrito es igual a la mitad de la amplitud del arco interceptado. Y así en la figura será:

$$\text{amplitud de } A\hat{M}B = \frac{1}{2} \text{ amplitud de } \overset{\frown}{ACB}.$$

Para demostrarlo, trácese el diámetro que pasa por el vértice del ángulo inscrito, pudiendo ocurrir tres casos: o que ese diámetro esté en uno de los lados, o que resulte interior al ángulo, o que resulte exterior, como se ve en la figura 102.

En el primer caso, uniendo el centro con el extremo A de la cuerda que no es diámetro, se forma un triángulo isósceles, AOM, que tendrá iguales los ángulos en A y en M, siendo su suma, o sea el doble de uno de ellos, igual al ángulo externo no adyacente AOB; de lo que resulta, que el ángulo inscrito AMB tiene una amplitud mitad de la del ángulo central AOB, y por consiguiente, mitad de la amplitud del arco interceptado ACB.

En el segundo caso, el diámetro que parte del vértice M divide al ángulo inscrito en dos ángulos que están en las condiciones del primer caso, por lo cual cada uno tiene una amplitud mitad de la de su arco interceptado; y como la suma de dos mitades es igual a la mitad de la suma, la amplitud del ángulo inscrito total será la mitad de la amplitud de su arco interceptado.

Y en el tercer caso, el diámetro que pasa por el vértice M forma con una de las cuerdas, MA, un ángulo, y con la otra, MB, otro ángulo, los cuales están en las condiciones del primer caso; resultando que el ángulo inscrito AMB, que es la diferencia de esos otros dos ángulos, tendrá por amplitud la mitad de la amplitud de su arco interceptado, el cual es diferencia entre los arcos interceptados por aquéllos.

De este teorema se deducen muchas consecuencias; veamos algunas:

·4. *El ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.* Pues intercepta la otra semicircunferencia, cuya amplitud es 180°.

·5. *Todos los ángulos inscritos en el mismo arco son iguales.* Pues todos interceptan también el mismo arco.

·6. *En todo cuadrilátero inscrito en una circunferencia cada dos ángulos opuestos son suplementarios.* Pues entre

esos dos ángulos opuestos interceptan toda la circunferencia y la suma de sus amplitudes será la mitad de la de ésta, o sea 180°.

·7. *Angulo semiinscrito.* Se puede considerar como un caso particular del ángulo inscrito, el llamado *semiinscrito* que está determinado por una cuerda y una semirrecta tangente en el extremo de esa cuerda (fig. 103). Se llama arco interceptado por dicho ángulo el arco MCB cuyos puntos están en los infinitos rayos del ángulo semiinscrito AMB.

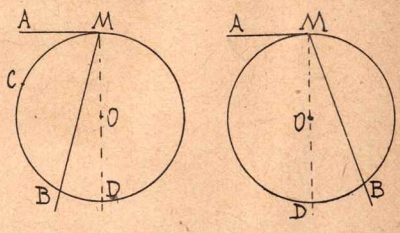


Fig. 103

También la amplitud del ángulo semiinscrito es igual a la mitad de la amplitud del arco interceptado. Pues trazando el diámetro que pasa por el vértice, formará con la tangente un ángulo recto, y formará con la cuerda un ángulo (que puede ser nulo), el cual, sumado o restado al recto, nos da el semiinscrito. Pero tanto el recto, como ese otro inscrito, tienen por amplitud la mitad de la amplitud del arco interceptado por ellos, luego lo mismo le ocurre al semiinscrito.

71. Angulo interior

Todo ángulo, cuyo vértice es interior a una circunferencia, se dice *ángulo interior*, y se llama arco interceptado por él, al arco formado por los puntos de la circunferencia que están en alguno de los infinitos rayos que constituyen el ángulo.

La amplitud de un ángulo interior a una circunferencia es igual a la semisuma de los arcos interceptados por él, y por su opuesto por el vértice. En efecto, para hallar la amplitud del ángulo AMB (fig. 104) trazaremos su opuesto por el vértice DMC, y la cuerda DB formará un triángulo DMB, respecto del cual, el ángulo de que se trata AMB es externo, y será igual a

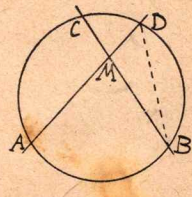


Fig. 104

la suma de los dos internos no adyacentes, o sea el $\hat{B}$ y el $\hat{D}$. Pero éstos son inscritos, y su amplitud es igual a la mitad del arco interceptado; luego su suma, que es igual al ángulo externo, tendrá por amplitud la semisuma de las amplitudes de esos arcos.

72. Ángulo exterior

Se llama *ángulo exterior* a una circunferencia, al ángulo cuyo vértice es un punto exterior a esa circunferencia, y cuyos lados tienen puntos comunes con la circunferencia. Esos lados serán, por tanto, o secantes, o tangentes, o uno secante y otro tangente. En particular, cuando los dos son tangentes, el ángulo se llama *circunscrito*, y es el más interesante. Los puntos de la circunferencia que están en alguno de los rayos que integran el ángulo exterior, forman dos arcos que se dicen arcos interceptados por el ángulo.

La amplitud de un ángulo exterior es igual a la semidiferencia entre las amplitudes de los arcos interceptados por él.

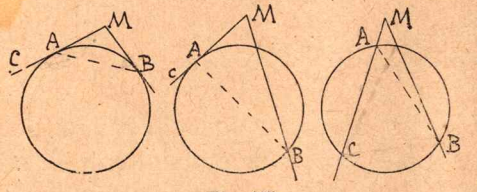


Fig. 105

Pues como se ve en la figura 105, el ángulo exterior M, es igual a la diferencia entre el ángulo BAC, que es externo no adyacente en el triángulo AMB, y el otro interno ABM; pero ese minuendo y ese sustraendo, cuya diferencia es $\hat{M}$, son inscritos o semiinscritos que interceptan cada uno alguno de los dos arcos que intercepta $\hat{M}$, luego la amplitud de éste será igual a la semidiferencia entre las amplitudes de estos arcos interceptados

73. Aplicaciones a problemas gráficos

·1. *Trazado de ángulos rectos.* Se puede construir un ángulo recto sin más que trazar una semicircunferencia y unir los extremos de su diámetro con un punto cualquiera de ella.

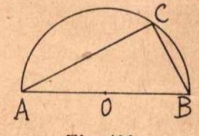


Fig. 106

Y así, para *construir un triángulo rectángulo, dadas la hipotenusa y un ángulo agudo, o la hipotenusa y un cateto,* se puede tomar la hipotenusa dada AB (fig. 106) como diámetro y trazar una semicircunferencia; trazando luego en un extremo el ángulo agudo que se nos da, o en su caso, el cateto, el punto de intersección C con la semicircunferencia será el vértice del ángulo recto, pues ese ángulo ACB está inscrito en una semicircunferencia (**70** ·4).

·2. *Trazado de las tangentes a una circunferencia por un punto dado.* Si el punto que se nos da *está en la circunferencia*, la tangente a ésta se construye trazando el radio que va a ese punto, y construyendo la perpendicular a él en su extremo, la cual será tangente (**58** ·3). Supongamos ahora que se nos pide el trazado de las tangentes a una circunferencia de centro O (fig. 107) que pasen por un punto exterior A. Para construirlas basta unir este punto con el centro, y tomando el segmento de unión OA, como diámetro, se traza una circunferencia, o parte de ella, que cortará a la dada en dos puntos B y C, que son los de contacto de las tangentes pedidas; puesto que los ángulos OBA y OCA son rectos por estar inscritos en una semicircunferencia.

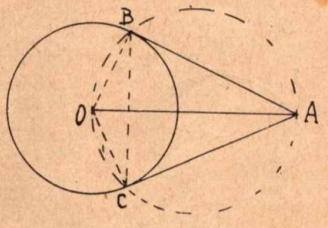


Fig. 107

·3. *Propiedades del ángulo circunscrito* La figura anterior nos enseña que los triángulos rectángulos OAB y OAC son iguales por tener iguales la hipotenusa y un cateto, por lo cual, las tangentes AB y AC que se encuentran en los lados del ángulo circunscrito CAB, son iguales, y como también son iguales

los radios OB y OC, la recta OA será mediatriz o eje de simetría de la cuerda de los contactos BC, y de los triángulos isósceles OBC y ABC (66 ·2).

·4. *Construcción del arco capaz de un ángulo dado. Se llama arco capaz de un ángulo dado a cualquier arco tal, que los ángulos inscritos en él sean iguales a ese ángulo dado.* Por ejemplo, el arco capaz de un ángulo recto es una semicircunferencia. Asímismo, para calcular la amplitud de un arco capaz del ángulo de 60° observaremos que todo ángulo inscrito en tal arco debe tener una amplitud de 60°, y por tanto tiene que interceptar un arco de 120°, por lo cual la amplitud de dicho arco capaz del ángulo de 60° será de 360°—120°, o sea de 240°.

Como vemos, el arco capaz de un ángulo dado tiene una amplitud determinada, pero el radio es arbitrario; por tanto, para que el arco quede determinado necesitamos otro dato, que suele ser el segmento que une los extremos del arco. He aquí el problema :

Dado un ángulo, y dado un segmento, construir el arco capaz de ese ángulo, que tenga por extremos los del segmento dado.

Si el segmento es AB (figura 108), y el ángulo es el $\hat{M}$, bastará construir sobre un extremo de AB, un ángulo ABC, igual al M, y trazar por ese extremo B, la perpendicular al lado BC. Dicha perpendicular encuentra a la mediatriz de AB en un punto O, que es el centro del arco que se busca; arco que debe estar, con respecto a la recta AB, en distinto semiplano que el rayo BC.

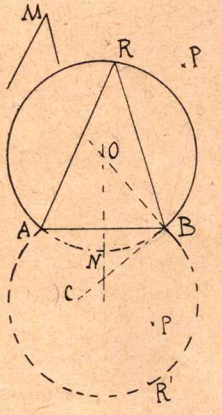


Fig. 108

Y en efecto, el arco trazado desde el centro O con radio OA, pasa desde luego por B, si se prolonga suficientemente, pues O, equidista de A y B. Para demostrar ahora que todo ángulo, tal como el $A\hat{R}B$, que esté inscrito en el arco ARB, es igual al ángulo dado $\hat{M}$, basta obser-

var que la amplitud del arco ANB es el doble de la amplitud del ángulo semiinscrito ABC, el cual es semiinscrito, porque BC es perpendicular a BO, y por tanto, tangente; resulta pues, que el ángulo ARB es igual al ABC y por tanto al $\hat{M}$.

Más sencillo de recordar, aunque más largo de efectuar, es construir el triángulo isósceles AOB del cual se conoce la base, y el ángulo en el vértice, que es doble que el $\hat{M}$, si $\hat{M}$ es agudo.

Obsérvese que hay dos arcos simétricos respecto del segmento AB que cumplen las condiciones del problema, y que son el ARB y el AR'B.

En el lenguaje corriente se dice que *el segmento* AB *se ve desde el punto* R *bajo el ángulo* M, lo cual significa que el angulo ARB es igual al $\hat{M}$. Utilizando este lenguaje se tiene :

·5. *El lugar geométrico de los puntos de un plano desde los cuales se ve un segmento dado bajo un ángulo dado, es la figura formada por dos arcos de circunferencia, cuyos extremos son los del segmento dado, capaces del ángulo dado.*

En efecto, ya hemos demostrado que todo punto, tal como el R, o el R', que esté en uno de esos dos arcos, tiene la propiedad de que desde él se ve el segmento dado bajo el ángulo dado M.

Inversamente, si un punto P no está en ninguno de esos dos arcos, el ángulo APB no puede ser igual al M; pues dicho ángulo está inscrito en un arco que pasa por A, P y B, el cual tiene que ser de distinto radio que el ARB, y no puede ser capaz del mismo ángulo M.

La construcción del arco capaz de un ángulo dado permite resolver muchos problemas gráficos que de otra manera pueden parecer difíciles. He aquí un ejemplo :

·6. *Construir un triángulo conociendo la longitud de un lado, la amplitud del ángulo opuesto, y la longitud de la altura que parte del vértice de este ángulo.*

Construiremos un segmento igual al lado; sobre él, trazaremos el arco capaz del ángulo dado, y una paralela al lado, trazada a una distancia igual a la altura conocida, deberá cortar a dicho arco en el tercer vértice del triángulo.

74. Polígonos inscritos y circunscritos

·1. *Polígonos inscritos en una circunferencia. Si en una circunferencia tomamos* n *puntos* ($n > 2$), *y considerados en un orden natural, unimos cada uno con el siguiente, y el último, con el primero, se forma el contorno de un polígono convexo, que se dice inscrito en la circunferencia; así como ésta se dice que está circunscrita al polígono.* En efecto, el orden natural supone que entre cada dos puntos consecutivos no exista ninguno de los otros *n* puntos, por tanto, si en la poligonal formada se prolonga un lado cualquiera, tal como el AB (fig. 109), quedan todos los vértices en el mismo semiplano (**57** ·6), y el polígono será convexo (**45** ·1). El polígono está contenido en el círculo.

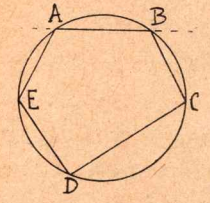


Fig. 109

·2. *Polígonos circunscritos a una circunferencia.* Supongamos ahora que en una circunferencia tomamos *n* puntos, tales que considerados en un orden natural cualquiera, el arco que forman dos consecutivos es siempre menor que una semicircunferencia Tracemos por cada uno de esos puntos la tangente a la circunferencia, y resultará que cada dos tangentes trazadas en puntos consecutivos se cortan, precisamente en un punto de la bisectriz del ángulo formado por los radios que van a los puntos de contacto (**73** ·3).

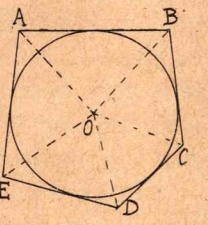


Fig. 110

Los n *puntos de intersección de cada dos tangentes consecutivas son vértices de un polígono convexo, que se dice circunscrito a la circunferencia; y ésta se dice inscrita en el polígono.*

Y en efecto, si limitamos cada tangente, tal como la AB (fig. 110), en los puntos A y B en que es cortada, por las dos inmediatas, se forma una

poligonal que podemos ver que es convexa. Para ello observaremos que las demás tangentes, tales como la ED, no pueden cortar a la AB en puntos del segmento AB, ya que el punto de intersección de las tangentes AB y ED, si existe, tiene que estar en la bisectriz del ángulo formado por los radios que van a los puntos de contacto, y esa bisectriz es exterior al ángulo AOB. Y como el segmento AB no contiene ningún punto de la recta ED, estarán sus puntos en el mismo semiplano respecto de esa recta (8), y lo mismo les ocurrirá a los demás vértices del polígono, lo que prueba que es convexo.

·3. *Relaciones entre los perímetros. El perímetro de cualquier polígono circunscrito a la circunferencia es mayor que el de cualquier polígono inscrito en la misma circunferencia.*

Pues el inscrito está comprendido en el circunscrito (47 ·3).

·4. *Generalización.* Generalizando las definiciones anteriores se llama también polígono inscrito en una circunferencia a cualquier polígono, simple o cruzado, cuyos vértices están en la circunferencia; y circunscrito, a cualquier polígono, cuyos lados o sus prolongaciones son tangentes a la circunferencia. Sin embargo, mientras no se advierta lo contrario, nosotros entenderemos por polígono inscrito o circunscrito, los convexos, que antes hemos definido.

75. Polígonos regulares

·1. *Llamaremos polígono regular a todo polígono convexo que tenga sus lados iguales* (equilátero), *y sus ángulos también iguales* (equiángulo).

Lo son, por ejemplo, el triángulo equilátero y el cuadrado. En cambio el rombo es equilátero, pero no equiángulo; y el rectángulo es equiángulo, pero no equilátero (en general).

·2. *Formación. Si una circunferencia la dividimos en* n *partes iguales* ($n > 2$), *y unimos cada dos puntos de división, que sean consecutivos, el polígono inscrito que se forma es regular* (fig. 111). Pues sus lados son iguales, por ser cuerdas

correspondientes a arcos iguales (67); y sus ángulos son iguales, porque están inscritos en arcos iguales, que comprenden dos divisiones (70). *Y si trazamos las tangentes por los puntos de división, el polígono circunscrito que se forma es también regular* (fig. 111). Pues si unimos el centro con los puntos de contacto, y con los vértices del polígono circunscrito, se forman 2 *n* triángulos rectángulos, todos iguales, ya que tienen iguales los catetos que son radios, y los ángulos que ellos forman con las hipotenusas, por ser éstas bisectrices del ángulo que forman cada dos radios consecutivos (74). De la igualdad de esos triángulos rectángulos se deduce que el polígono es equilátero y equiángulo, luego es regular.

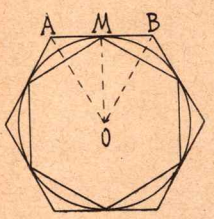


Fig. 111

·3. *Teorema recíproco. Todo polígono regular tiene una circunferencia inscrita y otra circunscrita, ambas del mismo centro* (fig. 112).

En efecto, supongamos un polígono regular. Todos sus lados serán iguales, y también sus ángulos, por hipótesis. Por tres vértices consecutivos, A, B y C, pasará una circunferencia, cuyo centro es el punto O, de intersección de las mediatrices de los lados AB y BC (**62** ·1). Si ese punto O, lo unimos con los tres vértices A, B y C, los tres segmentos de unión son iguales, y los dos triángulos que se forman son isósceles e iguales, en este orden $\overset{O}{A}\overset{O}{B} = \overset{O}{C}\overset{O}{B}$ por tener el polígono los lados iguales. Se deduce de aquí que los ángulos en B de ambos triángulos son iguales entre sí, e iguales por tanto a la mitad del ángulo del polígono regular dado. Resulta de esto que OB es bisectriz del ángulo ABC; pero también OC resulta bisectriz del ángulo BCD, porque el ángulo BCO vale la mitad del ángulo del polígono regular; luego si unimos O con D se formará otro triángulo tal que es $\overset{O}{C}\overset{O}{D} = \overset{O}{C}\overset{O}{B}$ lo cual demuestra que es OD = OC, y que la cir-

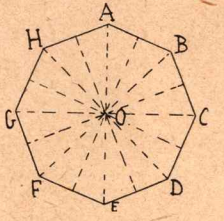


Fig. 112

cunferencia que pasaba por A, B y C, también pasa por D. Uniendo en seguida O con E se demuestra igualmente que esa circunferencia pasa por E, y luego por F, G y H. Luego el polígono tiene una circunferencia circunscrita.

Pero el punto O, que equidista de los vértices del polígono, también equidista de los lados, pues esos lados son cuerdas iguales de la circunferencia circunscrita y equidistan del centro (68), luego habrá una circunferencia que es tangente a los lados en sus puntos medios (58 ·3), y por tanto, inscrita, siendo su centro el mismo punto O.

Al centro de las circunferencias inscrita y circunscrita al polígono regular se le llama *centro del polígono*, llamándose *radio* al de la circunferencia circunscrita, y *apotema*, al radio de la inscrita.

·4. *Valor del ángulo. El ángulo de un polígono regular de* n *lados es igual a* $\frac{(n-2) \text{ llanos}}{n}$ (54).

·5. *Idea de los polígonos estrellados.* Si la circunferencia la dividimos en n partes iguales, y unimos los puntos de división de h en h, se forma un polígono convexo de n/h lados, cuando es n múltiplo de h, pero si no lo es, se forma un polígono cruzado que se llama *polígono estrellado* (fig. 113). Se supone $h < \frac{n}{2}$.

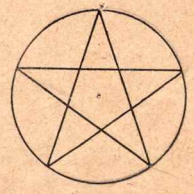


Fig. 113

Ejercicios

Construir un triángulo, dado un lado, el ángulo opuesto y la mediana que parte de este ángulo.

Hallar el valor del ángulo de un polígono regular de 3, o de 4, o de 5, o de 6 lados.

Divídase la circunferencia en diez partes iguales, utilizando el círculo graduado y trácense todos los polígonos convexos y estrellados que resultan de unir esas partes de h en h, siendo h cualquier número menor que 5.

LECCION 13

FIGURAS SIMETRICAS

76. Simetría con respecto a un centro

·1. *Definición. Dos figuras se dicen simétricas respecto de un punto llamado centro, cuando sus puntos se corresponden biunívocamente, de tal manera que todo segmento que una dos puntos homólogos pasa por el centro de simetría, siendo éste su punto medio.*

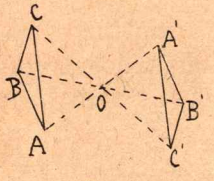


Fig. 114

De manera, que la figura simétrica de una F, formada por los puntos A, B, C,... se halla buscando el punto A' que se encuentra en la recta OA, en el semirrayo opuesto al OA, y tal que es OA = OA'; y hallando análogamente los puntos B', C',... que se corresponden con los de la figura F (fig. 114).

·2. *Propiedad fundamental. Dos figuras simétricas son iguales* (**46** ·1). Pues sus puntos se corresponden biunívocamente; y todo segmento AB que una dos puntos cualesquiera de una de las figuras es igual al segmento A'B' que une los puntos homólogos de aquéllos; ya que se tiene la igualdad de triángulos $_{A}^{O}{}_{B} = {}_{A'}^{O}{}_{B'}$ (**36** ·1).

Si se quiere precisar sobre igualdad directa e inversa, podemos observar que las figuras simétricas, cuyos puntos estén todos en una misma recta, que pasará por el centro de simetría, son figuras inversamente iguales, respecto de esa recta; si son figuras que no tienen sus puntos en una misma recta, pero sí en el mismo plano, que pasará por el centro de simetría, son directamente iguales, respecto de ese plano; y ya veremos, que si se trata de figuras cuyos puntos no están todos en el mismo plano, son inversamente iguales, respecto del espacio, del cual hablaremos más adelante.

Hablando en lenguaje físico, las figuras planas simétricas respecto de un centro pueden coincidir por un giro de una de ellas, alrededor del del centro de simetría; giro de 180°, o media vuelta.

·3. *Consecuencias inmediatas.* Las primeras propiedades de las figuras simétricas respecto de un centro serán, pues, las *propiedades de las figuras iguales* (46 ·2), que no tenemos necesidad de repetir; las cuales, además, son de demostración directa muy sencilla. Hablaremos, pues, de segmentos homólogos, que serán iguales, de rectas homólogas; de ángulos y triángulos homólogos, etc.

·4. *Simetría plana.* Dado un centro de simetría en un plano, podemos hacer corresponder a cada punto del plano otro punto del mismo, que sea simétrico del primero, respecto del centro de simetría dado.

En la simetría así definida no hay más *punto doble* que el centro de simetría, que se considera simétrico de sí mismo; pues se llama elemento doble a todo elemento geométrico que se corresponde consigo mismo, y los puntos que no son el centro de simetría, tienen por simétricos, puntos distintos de ellos mismos.

Las rectas que pasan por el centro de simetría son *rectas dobles*, aunque no tienen más que un punto doble. Y en efecto, a cualquier punto situado sobre una recta le corresponde como simétrico otro punto, que está en la misma recta, cuando ésta pasa por el centro de simetría.

Toda recta que no pase por el centro de simetría tiene como simétrica otra recta paralela a ella, y el centro de simetría equidista de las dos rectas. En efecto, dada una recta *p*, que no pase por el centro de simetría O (figura 115), para hallar su simétrica *p'* bastará trazar desde O la perpendicular OA a la recta *p;* hallar luego el simétrico de A respecto de O, y trazar luego la perpendicular a la recta OA, por el punto A', simétrico del A. Esta perpendicular será la recta simétrica de la *p*, pues para cualquier par de puntos B y B' que estén en una misma recta

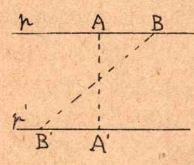


Fig. 115

que pase por O, se verifica $\overset{O}{A'B'} = \overset{O}{AB}$ de donde OB' = OB.

·5. *Construcción de una figura simétrica de otra.* Observemos que *si un punto de una figura está en una recta de la misma figura, su punto simétrico está en la recta simétrica de aquélla;* y esta propiedad puede ser utilizada en la construcción de figuras simétricas. Y así por ejemplo, si queremos construir el simétrico del polígono ABCDEA (fig. 116) respecto del centro O, empezaremos por trazar las rectas que pasan por O y por cada uno de los vértices, y para buscar los del nuevo polígono se puede aplicar la misma definición de figuras simétricas, según la cual bastará tomar las distancias OA' = OA » OB' = OB » OC' = OC » etc.

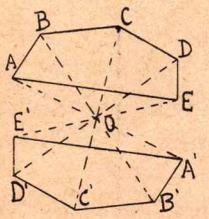


Fig. 116

Pero también podemos tomar solamente OA' = OA y enseguida por A' trazar una paralela al lado AB, que cortará a la recta OB en un punto B' simétrico del B, pues estando B en la recta AB, su simétrico tiene que estar en la paralela A'B'; enseguida trazaremos por B' la paralela B'C' a BC, y así sucesivamente.

77. Centros de simetría de las figuras

·1. *Definición. Una figura se dice que admite un centro de simetría cuando a todo punto de la figura corresponde otro de la misma figura, que es simétrico del primero respecto del centro.*

Es decir, cuando la figura coíncide con su simétrica respecto de ese centro. Por ejemplo, la circunferencia y el cuadrado tienen como centro de simetría el centro de figura. El polígono regular de un número par de lados admite como centro de simetría el centro del polígono. El paralelogramo admite como centro de simetría el punto de concurso de las diagonales (**55** ·4).

·2. *Centros de simetría de orden superior* Los centros de simetría que ahora hemos definido se llaman centros de simetría *binaria*, porque los puntos de la figura que los poseen pue-

den asociarse de dos en dos, de tal modo, que si llamamos O al centro de simetría binaria de una figura, y A, A' son dos puntos simétricos, los segmentos OA y OA' son iguales y están en dos rayos que dividen al haz de vértice O en dos partes iguales.

Consideremos ahora un triángulo equilátero ABC (fig. 117), y el centro O de las circunferencias inscrita y circunscrita (**75** ·3). Los puntos se pueden asociar, respecto del O, de tres en tres, siendo por ejemplo una terna, la formada por los vértices; otra, la formada por los puntos medios de los lados; otra, la formada por los puntos P_1, P_2, P_3 que se han tomado uno en cada lado, de manera que el primero diste de A lo mismo que el segundo de B, y lo mismo que el tercero de C. Tales ternas de números tienen esta propiedad: *que los segmentos* OP_1, OP_2, OP_3 *son iguales, y los rayos que los contienen dividen al haz de vértice* O *en tres partes iguales.* Por esto al punto O se le llama *centro de simetría ternaria* del triángulo.

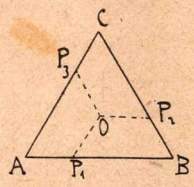


Fig. 117

En general, *una figura se dice que admite un centro de simetría de orden* n *cuando sus puntos se pueden asociar de* n *en* n *de manera que cada* n *puntos correspondientes equidisten del centro, y los rayos que parten de este centro y pasan por esos puntos dividan al haz a que pertenecen en* n *partes iguales.*

De esta definición podemos deducir inmediatamente que el centro de simetría binaria del cuadrado es también de simetría cuaternaria; y que todo polígono regular tiene un centro de simetría de orden *n*, si es *n* el número de lados, que es el centro de las circunferencias inscrita y circunscrita. El centro de una circunferencia es de simetría de cualquier orden.

78. Simetría con respecto a un eje

·1. *Definición. Dos figuras se dicen simétricas respecto de una recta, llamada eje, cuando sus puntos se corresponden biunívocamente, de tal manera, que todo segmento que una*

dos puntos homólogos es perpendicular al eje, cortándole en un punto, que es punto medio del segmento.

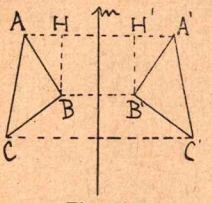


Fig. 118

Y así, el punto simétrico del A respecto del eje *m* (fig. 118) es el A', tal que *m* es mediatriz del segmento AA', y la figura simétrica de la ABC es la A'B'C' formada por los puntos simétricos de aquéllos.

·2. *Propiedad fundamental. Dos figuras simétricas respecto de un eje son iguales* (**46** ·1). En efecto, sus puntos se corresponden biunívocamente, y todo segmento AB que una dos puntos de una de las figuras, es igual al segmento A'B' que une los puntos homólogos de aquéllos, pues se verifica la igualdad de triángulos $_{A}^{H}{}_{B} = {}_{A'}^{H'}{}_{B'}$.

Si se quiere precisar sobre igualdad directa e inversa podemos observar que las figuras simétricas situadas en un mismo plano, que pasará por el eje de simetría, son inversamente iguales respecto de ese plano. En el espacio veremos que son directamente.

Hablando en lenguaje físico, las figuras planas simétricas respecto de un eje se pueden hacer coincidir por un giro de una de ellas alrededor del eje; giro de 180°, o media vuelta. En este giro hay que sacar la figura fuera del plano, o sea darle vuelta de campana, mientras que las simétricas, respecto de un centro, se giraban en el plano en donde están, sin salir de él (**75** ·2).

·3. *Consecuencias inmediatas.* Las primeras propiedades de las figuras simétricas respecto de un eje serán, pues, las propiedades de las figuras iguales (**46** ·2), que no tenemos necesidad de repetir; las cuales, además, son de demostración directa muy sencilla. Hablaremos, pues, de segmentos homólogos, que serán iguales, de rectas homólogas, de ángulos y triángulos homólogos, etc.

·4. *Simetría plana.* Dado un eje de simetría en un plano podemos hacer corresponder a cada punto del plano otro punto del mismo, que sea simétrico del primero, respecto del eje de simetría dado. En la simetría así definida no hay más *puntos*

dobles, es decir, puntos que coincidan con sus homólogos, que son los del eje de simetría, el cual es también una recta doble. Las demás *rectas dobles* son las perpendiculares al eje, aunque no tienen dobles más que un punto propio cada una, el de intersección con el eje.

Toda recta paralela al eje de simetría tiene por homóloga a otra recta, también paralela al eje, y éste equidista de ellas. Esto es consecuencia del teorema que dice que las paralelas son rectas equidistantes (**55** ·6). *Y toda recta que corta al eje de simetría tiene por simétrica a otra recta que corta al eje en el mismo punto, siendo el eje bisectriz de dos de los ángulos opuestos por el vértice que aquellas rectas forman.* La demostración es inmediata, por triángulos iguales, o por las propiedades del triángulo isósceles (**36** ·2); o por las propiedades generales.

·5. *Construcción de una figura simétrica de otra.* Observemos que si un punto de una figura está en una recta de la misma figura, su punto simétrico está en la recta simétrica de aquélla; y esta propiedad puede ser utilizada para la construcción de figuras simétricas. Y así, para construir un polígono simétrico del ABCDEA de la figura 119, trazaremos por los vértices, perpendiculares al eje, y buscando directamente el simétrico de uno, tal como el A, se puede hallar luego el simétrico de B, prolongando AB hasta el encuentro con el eje en H, y uniendo H con A', obtendremos el B', y así todos.

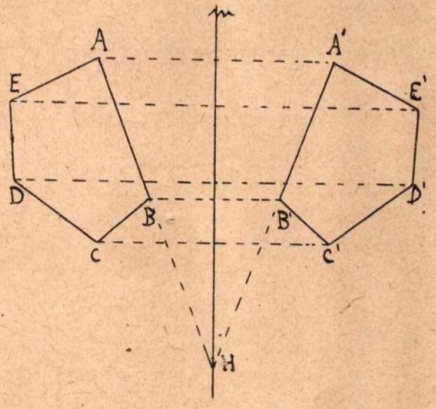


Fig. 119

79. Ejes de simetría de las figuras

·1. *Definición. Una figura se dice que admite un eje de simetría, cuando a todo punto de la figura corresponde otro punto de la misma figura, que es simétrico del primero respecto de aquel eje.* Es decir, cuando la figura coincide con su simétrica respecto de aquel eje.

·2. *Ejemplos.* De la misma definición se deduce inmediatamente : que todo segmento de recta admite un eje de simetría, que es su mediatriz; todo ángulo admite un eje de simetría, que es la recta que contiene a su bisectriz; el triángulo isósceles admite un eje de simetría, que es la mediatriz de la base, a la cual llamábamos anticipadamente eje de simetría del triángulo (**36** ·2); el triángulo equilátero, que es triángulo isósceles, tomando por base cualquier lado, admite tres ejes de simetría; el rectángulo y el rombo, dos; el cuadrado, cuatro; el polígono regular de *n* lados, admite *n;* el círculo admite infinitos, que son sus diámetros; etcétera.

80. Demostraciones por simetría o por igualdad

·1. *Simplificación de algunas demostraciones.* Las propiedades de las figuras simétricas y de las figuras iguales permiten simplificar muchas demostraciones. Basta para ello tener en cuenta, que si dos figuras son simétricas, las figuras parciales formadas por elementos homólogos son también simétricas, y por tanto iguales. Asímismo, si dos figuras son iguales, las figuras parciales formadas por elementos homólogos son también iguales (**46** ·2) Y así resulta : *en dos triángulos que sean simétricos respecto de un centro, o respecto de un eje, o que sean simplemente iguales, las alturas homólogas son también simétricas, o iguales; lo mismo les ocurre a las bisectrices, o medianas, o mediatrices homólogas; o a los radios de*

las circunferencias inscrita y circunscrita, etc., y lo que decimos de los triángulos se generaliza a las demás figuras. Veamos un ejemplo, en el que aplicamos la simetría :

·2. *Problema. Dada una recta* m *y dos puntos* A *y* B, *situados en el mismo semiplano respecto de la recta, buscar en esta recta un punto tal que la suma de las distancias desde él a los* A *y* B *tenga el menor valor posible.*

Para hallar ese punto, se busca el simétrico del A o del B respecto de la recta *m*, por ejemplo el A' simétrico del A (figura 120); se une luego A' con B, y el punto C, en que la recta de unión corte a la *m*, será el pedido. En efecto, la suma de las distancias desde C a los A y B es igual a la distancia A' B; pues siendo A' simétrico del A, y C simétrico de sí mismo, será el segmento A'C simétrico del AC, y por tanto igual a él, resultando ;

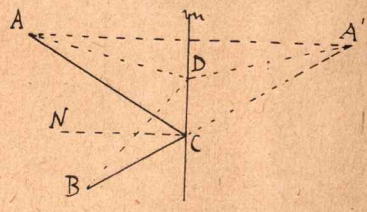


Fig. 120

$$CA + CB = CA' + CB = A'B$$

En cambio, para cualquier otro punto D, que se tome en la recta, se tiene por la misma razón : $DA + DB = DA' + DB$; pero ya sabemos que en el triángulo A'BD, un lado A'B es menor que la suma de los otros dos; luego el punto C, es el que se pide.

Obsérvese en la figura, que los ángulos que la recta *m* forma con las CA y CA' son simétricos, y por tanto iguales; por lo cual también serán iguales los ángulos que forma la perpendicular CN a la recta *m* con las CA y CB. Esto tiene importancia en la teoría de la reflexión, que se estudia en la Física.

·3. De igual manera se demuestra que dada una recta *m* y dos puntos A y B situados en *distinto* semiplano respecto de la recta, el punto de esta que tiene la propiedad de que *la diferencia* de las distancias a los A y B es la *mayor* posible, se halla

uniendo uno de los puntos A o B con el simétrico del otro, respecto de *m*, y hallando la intersección de *m* con la recta de unión.

Ejercicios

Constrúyase un polígono y hállese su simétrico respecto de un centro y de un eje de simetría.

Demuéstrense el teorema (**80** ·5) y algunos de los teoremas (**79** ·2)

LECCIÓN 14

SEMEJANZA DE TRIANGULOS

81. El concepto de triángulos semejantes

·1. Dado un triángulo ABC (fig. 121), construyamos un segmento cualquiera A'B', y en sus extremos, como vértices, construyamos dos ángulos que sean : $\hat{A}' = \hat{A}$ » $\hat{B}' = \hat{B}$.

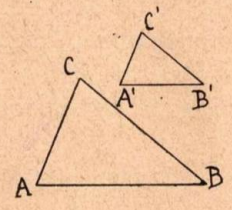


Fig. 121

Los lados no comunes de los ángulos construídos se cortarán en un punto C', puesto que se trata de dos ángulos conjugados con respecto a la secante A'B', y suman menos de dos rectos (**50** ·4); y se formará, por tanto, un nuevo triángulo A'B'C'. Como el tercer ángulo de un triángulo es suplemento de la suma de los otros dos, también será $\hat{C}' = \hat{C}$. Por otra parte, demostraremos enseguida, que en el caso de haber tomado A'B' mitad de AB, también resulta A'C' mitad que AC, y también B'C' mitad que BC. Y que cualquiera que sea el segmento que hayamos tomado A'B', siempre resulta que la relación o razón entre AB y A'B' es igual a la relación entre AC y A'C' y a la relación entre BC y B'C', lo cual se designa :

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

y se expresa en el lenguaje vulgar diciendo que los lados de uno de los triángulos son proporcionales a los del otro; (bien entendido que no tiene sentido el decir que el lado AB es proporcio-

nal al A'B', pues para formar proporción se necesitan, por lo menos, cuatro términos).

Los dos triángulos se dicen entonces *semejantes*, según la definición :

Dos triángulos se llaman semejantes cuando tienen sus ángulos respectivamente iguales y sus lados proporcionales.

·2.—Decir que los lados son proporcionales, significa, como hemos visto, que *la relación entre un lado y su homólogo es constante;* entendido que los lados que se deben tomar como homólogos en ambos triángulos deben ser opuestos a ángulos homólogos, los cuales son iguales. Pero la propiedad del *cambio de medios* de las proporciones permite escribir también la proporcionalidad de lados de esta manera

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'} \quad » \quad \frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

es decir, *la razón entre dos lados cualesquiera de uno de los triángulos es igual a la razón entre sus homólogos.* Los triángulos semejantes los designaremos brevemente escribiendo: $\overset{C}{AB} \sim \overset{C'}{A'B'}$ en cuya forma abreviada están incluídas las cinco igualdades entre lados y ángulos.

·3. Esta semejanza tiene las propiedades, reflexiva, simétrica y transitiva (12). Insistiremos más adelante.

82. Teorema fundamental de la semejanza de triángulos

La teoría de semejanza la vamos a fundamentar en un teorema, al cual llegaremos por medio de otros teoremas previos.

·1. *Si tenemos dos rectas en un plano, y en una de ellas tomamos dos segmentos iguales* AB=MN, (figura 122), *al trazar por los extremos de los segmentos, rectas paralelas entre sí, que corten a la segunda recta, determinan en ella otros dos segmentos, que también son iguales :* A'B' = M'N'.

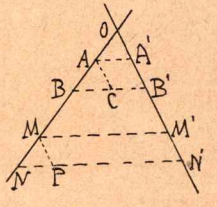


Fig. 122

En efecto, si la segunda recta es paralela a la primera, los segmentos determinados en ella son iguales

a los determinados en la primera, por lados opuestos de paralelogramos.

Y si las dos rectas dadas no son paralelas, tracemos por los extremos A y M de los primeros segmentos, dos paralelas, AC y MP, a la segunda recta. Se forman entonces dos triángulos iguales, en este orden $\overset{C}{A}B = M\overset{P}{N}$ por tener iguales los lados AB y MN, y los ángulos adyacentes a ellos, que son correspondientes entre paralelas; luego será AC = MP, y por tanto A'B' = M'N'.

Obsérvese, que cualquiera de los segmentos podríamos haberlo tomado a partir de O, pues por este punto siempre puede suponerse que pasa una paralela a las AA', BB'; o el AB en la semirrecta OA, y el MN en la semirrecta opuesta. De igual manera, el teorema se verificará para más de dos segmentos, lo cual nos permite resolver este problema gráfico:

·2. *Dividir un segmento en* n *partes iguales.* Se traza una recta por un extremo del segmento (fig. 123), se toman en ella *n* segmentos iguales cualesquiera a partir de dicho extremo, y consecutivos; se une el último extremo con el extremo libre del segmento, y se trazan paralelas a esa recta de unión.

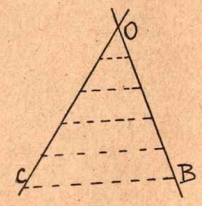


Fig. 123

·3. *Si tenemos dos rectas* p *y* q *de un plano, y en una de ellas* p *tomamos dos segmentos arbitrarios* AB *y* MN (fig. 124); *al trazar por los extremos de estos segmentos, rectas paralelas entre sí, que corten a la segunda recta* q, *determinan en esta otros dos segmentos, proporcionales a los primeros,* o sea tales que se verifica:

$$\frac{AB}{MN} = \frac{A'B'}{M'N'} \text{ o sea } \frac{AB}{A'B'} = \frac{MN}{M'N'}$$

Para demostrar este teorema distinguiremos tres casos posibles, que la razón $\frac{AB}{MN}$ sea un número entero, o fraccionario, o inconmensurable.

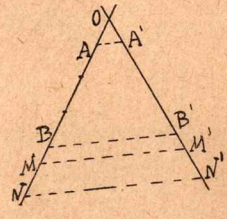


Fig 124

a) Si dicha razón es un número entero, por ejemplo,

$\frac{AB}{MN} = 3$, será $AB = MN \cdot 3$, lo cual quiere decir que podemos dividir AB en tres partes iguales a MN; y trazando luego paralelas, por los puntos de división, a las AA'..., quedará dividido A'B' en tres partes iguales a M'N', lo cual prueba que es también

$$\frac{A'B'}{M'N'} = 3, \text{ o en fin, } \frac{AB}{MN} = \frac{A'B'}{M'N'}$$

b) Si dicha razón es un número fraccionario, por ejemplo, $\frac{AB}{MN} = \frac{5}{3}$ será $AB = MN \times \frac{5}{3} = \frac{MN}{3} \times 5$, lo que nos dice que la tercera parte de MN está contenida cinco veces en AB; es decir, que si dividimos AB en cinco partes iguales y MN en tres partes iguales, las partes de AB y MN son iguales. Trazando entonces por los puntos de división paralelas a las AA'... también resultará A'B' dividida en cinco partes iguales, y M'N' en tres partes iguales entre sí, y a las de A'B'; luego también es

$$\frac{A'B'}{M'N'} = \frac{5}{3}, \text{ y será } \frac{AB}{MN} = \frac{A'B'}{M'N'}.$$

c) Por fin, si la razón dicha es un número inconmensurable, o mejor dicho irracional (pues los que son entonces inconmensurables son los segmentos AB y MN), llamando $\frac{m}{n}$ y $\frac{m+1}{n}$ a los valores aproximados por defecto y por exceso de dicha razón, en menos de $\frac{1}{n}$ será $\frac{m}{n} < \frac{AB}{MN} < \frac{m+1}{n}$ (20), o lo que es igual $\frac{AB}{MN} = \lim. \frac{m}{n} = \lim \frac{m+1}{n}$.

De la primera fórmula se deduce que es

$$MN \times \frac{m}{n} < AB < MN \times \frac{m+1}{n},$$

o bien $\frac{MN}{n} \times m < AB < \frac{MN}{n} \times (m+1)$;

y esto nos dice que si MN lo dividimos en *n* partes iguales, y una de estas partes, que es $\frac{MN}{n}$, la tomamos *m* veces en el rayo AB, llegamos a un punto P tal es $AP < AB$; pero si esa parte $\frac{MN}{n}$ la tomamos $(m+1)$ veces en el rayo AB llegamos a un

punto Q, tal que es AQ > AB. Trazando luego por los puntos de división, paralelas a las AA'..., se obtendrán dos puntos P' y Q', tal que se tiene: A'P' < A'B' < A'Q'

$$\text{y } A'P' = \frac{M'N'}{n} \times m \text{ » } A'Q' = \frac{M'N'}{n} \times (m+1);$$

de donde resulta $\frac{M'N'}{n} \times m < A'B' < \frac{M'N'}{n}(m+1)$,

$$\text{o sea } \frac{m}{n} < \frac{A'B'}{M'N'} < \frac{m+1}{n},$$

lo cual nos dice que es $\frac{A'B'}{M'N'} = \lim. \frac{m}{n} = \lim. \frac{m+1}{n}$,

$$\text{y por fin, } \frac{AB}{MN} = \frac{A'B'}{M'N'}.$$

El teorema es cierto aunque se tomen los segmentos AB y MN, o uno de ellos, a partir del punto O, y aunque se tomen en rayos opuestos que empiezan en O, pues por O pasa una paralela a BB'.

Por otra parte, si escribimos la proporción en la forma $\frac{AB}{A'B'} = \frac{MN}{M'N'}$ que resulta de cambiar los medios en la primera, podemos enunciarla llamando segmentos homólogos a los que se encuentran entre las mismas paralelas, y dirá: *la razón entre un segmento y su homólogo es igual a la razón entre el otro segmento y su homólogo.* Y por tanto, si en vez de tener dos segmentos solamente, o sea los AB y MN, tenemos más de dos, siempre resultará que la razón entre un segmento y su homólogo es constante; y llegamos al teorema siguiente:

·4. *Si dos rectas de un plano son cortadas por varias paralelas, los segmentos determinados en una de las rectas son proporcionales a sus homólogos de la otra;* o lo que es igual, *la razón entre un segmento y su homólogo es constante.*

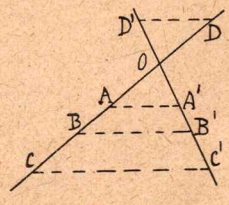


Fig. 125

Y así, en la figura 125, se tiene:

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{OC}{OC'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{OD}{O'D'} = \frac{CD}{C'D'} = \cdots$$

pues basta aplicar el teorema (·3) a cada dos razones.

Antes de pasar adelante fijemos la atención en el problema de:

·5. *Construcción de la cuarta proporcional a tres longitudes dadas.*

El problema se enuncia de esta manera: dadas tres longitudes *a*, *b*, *c*, hallar una cuarta longitud *x* que verifique la siguiente proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$, es decir, que sea $x = \frac{b \cdot c}{a}$.

Para hallar *x* trazaremos un ángulo convexo (fig. 126); tomaremos en uno de sus lados la longitud *a*, y otra de las longitudes *b* o *c*, empezando por comodidad a contar la longitud *a*, desde el vértice, y la otra también desde el vértice, o desde el extremo libre de *a;* tomaremos en el otro lado, y a partir del vértice la tercera longitud, y uniendo el extremo libre de ella, con el *a*, bastará trazar una paralela a la recta de unión, por el otro extremo libre, para determinar *x*.

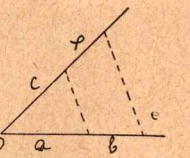


Fig. 126

·6. *Teorema fundamental de la semejanza de triángulos.* Veamos por fin el teorema en que nos vamos a fundar para los casos de semejanza.

Toda recta paralela a un lado de un triángulo, la cual no pase por el vértice opuesto, corta a los otros dos lados, o a sus prolongaciones, en dos puntos, que determinan con dicho vértice opuesto, un nuevo triángulo, semejante al dado. Es decir, que si en la figura 127 es B'C' paralela a BC, se tiene (81):

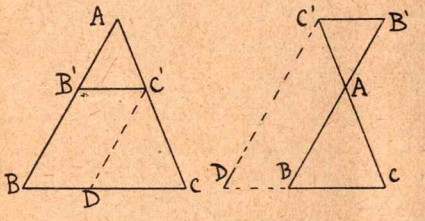


Fig. 127

$$\overset{C}{A}\overset{}{B} \sim \overset{C'}{A}\overset{}{B'}$$

En efecto, los ángulos son respectivamente iguales, pues por ejemplo, los $\hat{B}$ y $\hat{B}'$ son correspondientes o alternos entre paralelas. Y los lados son proporcionales, pues desde luego se verifica $\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'}$ según el teorema de los segmentos proporcionales (·3); y para pro-

bar ahora que la razón entre los terceros lados o sea $\frac{BC}{B'C'}$ es también igual a las anteriores razones, basta trazar por C' una paralela al lado opuesto, que cortará a la recta BC en un punto D; y aplicando de nuevo el teorema de las rectas proporcionales a las que concurren en C, cortadas por las paralelas AB y C'D, se tendrá $\frac{AC}{AC'} = \frac{BC}{BD}$ y observando que es $B'C' = BD$ tendremos finalmente $\frac{AC}{AC'} = \frac{BC}{B'C'}$.

·7. *Recíproco. Si los triángulos dichos son semejantes, los lados* BC *y* B'C' *serán paralelos;* por formar ángulos iguales con AC.

83. Criterios de semejanza de triángulos

Existen criterios para reconocer la semejanza de triángulos, que se corresponden con los criterios de igualdad (Lección 5.ª), según los cuales basta conocer dos relaciones de igualdad de ángulos o proporcionalidad de lados, para deducir la semejanza.

·1. *Primer criterio. Si dos triángulos tienen dos ángulos respectivamente iguales, son semejantes.* Es decir, que si los triángulos ABC y A'B'C' (figura 128), tienen iguales por hipótesis los ángulos $\hat{A} = \hat{A}'$ y $\hat{B} = \hat{B}'$, son semejantes; lo cual quiere decir, que tendrán también iguales los terceros ángulos, y tendrán sus lados proporcionales.

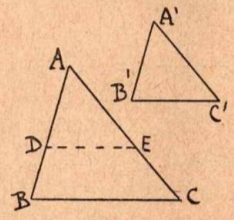


Fig. 128

En efecto, los terceros ángulos son iguales, por ser suplementos de la suma de los otros dos; luego es $\hat{C} = \hat{C}'$. Y para demostrar la proporcionalidad de lados, fijémonos en dos que sean homólogos, es decir opuestos a ángulos iguales, como por ejemplo AB y A'B'.

Si estos fueran iguales, los triángulos serían iguales, y por tanto semejantes, siendo la razón entre un lado y su homólogo la unidad.

Y si no son iguales, podremos tomar en el mayor de ellos un segmento igual al menor, AD = A'B'; y trazar por el extremo libre, D, una paralela al lado BC. Esta paralela formará un triángulo ADE semejante al ABC, en este orden $_{B}^{A}C \sim _{D}^{A}E$ (**82** ·6); e igual al A'B'C' en este orden $_{D}^{A}E = _{B'C'}^{A'}$, por el primer criterio de igualdad (35).

De donde se deduce la proporcionalidad de los lados y la semejanza de los triángulos dados $_{B}^{A}C \sim _{B'}^{A'}C'$.

·2. *Segundo criterio. Si dos triángulos tienen proporcionales dos lados, e iguales los ángulos que forman, son semejantes.*

Es decir, si en los mismos triángulos de la figura 128, suponemos que se verifica por hipótesis

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} \text{ » } \hat{A} = \hat{A}' \text{ será } _{B}^{A}C \sim _{B'}^{A'}C'$$

Se demuestra análogamente, o sea tomando en AB un segmento AD = A'B', y trazando por D la paralela a BC. Pero la igualdad de los triángulos $_{D}^{A}E = _{B'}^{A'}C'$ es consecuencia del segundo criterio de igualdad (36), ya que se verifica

$\hat{A} = \hat{A}'$ » AD = A'B', y además, al ser $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$

comparando esta proporción con la de la hipótesis, vemos que tienen tres términos iguales, y los cuartos términos también lo serán, luego también es AE = A'C', y los triángulos dados serán semejantes.

·3 *Tercer criterio. Si dos triángulos tienen los tres lados proporcionales, son semejantes.* Ahora la hipótesis es $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$ y la igualdad de los triángulos pequeños es consecuencia del tercer criterio de igualdad (37), ya que es $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$ y comparando estas razones con las anteriores, y teniendo en cuenta que es AD = A'B' resulta

$$AE = A'C' \quad y \quad DE = B'C'$$

·4. *El criterio dudoso. Si dos triángulos tienen dos pares de lados proporcionales, e iguales los ángulos opuestos a uno de esos pares, resultará, que los ángulos opuestos al otro par de lados, o son también iguales, y los triángulos serán semejantes, o son suplementarios.*

Pues si es $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$ y $\hat{B} = \hat{B}$ los triángulos ADE y A'B'C' verificarán la hipótesis del criterio dudoso de igualdad (39), y serán $\hat{E}$ y $\hat{C}'$, y por tanto $\hat{C}$ y $\hat{C}'$, iguales o suplementarios.

Ejercicios

Dividir un segmento en tres partes iguales, y luego en tres partes proporcionales a tres segmentos dados.

Explíquese la semejanza de triángulos rectángulos.

LECCIÓN 15

APLICACIONES DE LA SEMEJANZA DE TRIANGULOS

84. Rectas paralelas cortadas por concurrentes

·1. *Si tres o más rectas concurrentes cortan a dos paralelas determinan en ellas segmentos proporcionales.* Es decir, que si tres o más rectas que concurren en un punto O, (figura 129), cortan a dos paralelas AD y A'D', los segmentos determinados en la una son proporcionales a los determinados en la otra, tomando como segmentos homólogos los determinados por las mismas concurrentes, debiendo ser por tanto

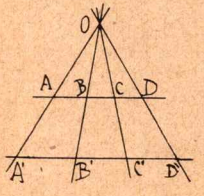


Fig. 199

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{AD}{A'D'} = \cdots$$

En efecto, los triángulos semejantes formados por las paralelas con las concurrentes nos dan sucesivamente (**82** ·6):

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{OC}{OC'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{OD}{OD'} = \frac{AD}{A'D'} = \cdots$$

·2. *División de un segmento en partes proporcionales a otros.*

Para dividir un segmento AD en partes proporcionales a otros segmentos dados, trazaremos dos rectas paralelas, tomaremos en una de ellas el segmento AD, y en la otra varios segmentos consecutivos, iguales a los dados A'B', B'C', C'D'; uniendo luego A' con A, y D' con D, las rectas de unión serán paralelas o concurrentes en un punto O, y trazando por B' y C'

las rectas paralelas a la A A' en el primer caso, o las rectas que pasen por el O en el segundo, quedará dividido AD en segmentos proporcionales a los dados (fig. 129).

Se puede también resolver este problema trazando un ángulo y tomando en uno de sus lados el segmento AD (fig. 130); tomando luego en el otro lado varios segmentos consecutivos *a*, *b*, *c* iguales a los dados, y uniendo el extremo libre del último con D; varias paralelas a la recta de unión resolverán el problema (82).

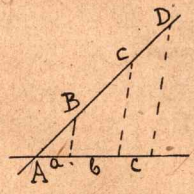


Fig. 130

Pues se verifica

$$\frac{AB}{a} = \frac{BC}{b} = \frac{CD}{c}$$

·3. *Teorema general de las rectas proporcionales. Si tenemos varias rectas concurrentes cortadas por varias paralelas.*

a) *los segmentos formados en las concurrentes son proporcionales;*

b) *los formados en las paralelas también lo son;* y

c) *los segmentos homólogos de dos paralelas son proporcionales a sus distancias al punto común a las concurrentes, contadas en cualquiera de éstas.* Y así, en la figura 131 se tiene :

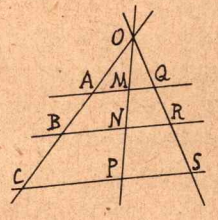


Fig. 131

a) $\frac{OA}{AB} = \frac{OM}{MN} = \frac{OQ}{QR}$ etc.

b) $\frac{AM}{MQ} = \frac{BN}{NR}$ o $\frac{AM}{CP} = \frac{MQ}{PS}$ etc.

c) $\frac{AM}{BN} = \frac{OM}{ON} = \frac{OQ}{OR}$ etc.

El teorema a) lo demostramos en la lección anterior (**82** ·4).

El b) lo acabamos de demostrar (·1). Y el c) es consecuencia de la aplicación de la proporcionalidad de lados a los triángulos semejantes de la figura.

85. Teorema del triángulo de lados mitad

·1. *Si por el punto medio de un lado de un triángulo se traza una paralela a otro lado, se forma un triángulo cuyos lados son mitad que los del primero* (fig. 132). Pues si es M el punto medio de AC, y es MN paralela a AB, será el triángulo MNC semejante al dado, por tener sus ángulos respectivamente iguales, y será

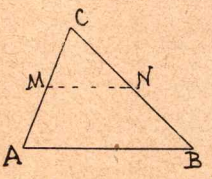


Fig. 132

$$CM = \frac{1}{2}\,CA \quad » \quad MN = \frac{1}{2}\,AB \quad » \quad CN = \frac{1}{2}\,CB$$

·2. *Teorema recíproco. El segmento* MN, *que une los puntos medios de dos lados de un triángulo, es paralelo al tercer lado, e igual a su mitad.* Pues entonces la semejanza $\overset{C}{M}\overset{}{N} \sim \overset{C}{A}\overset{}{B}$ se verifica por ser iguales los ángulos en C y proporcionarles los lados que los forman. De ellos resulta $\hat{A} = \hat{M}$, y como son correspondientes entre las rectas AB y MN cortadas por la secante CA, esas rectas son paralelas. Y como la razón entre un lado del triángulo pequeño y su homólogo del grande es $^1/_2$, será MN mitad de AB.

·3. *Aplicación al trapecio. Si por el punto medio de un lado no básico de un trapecio, trazamos la paralela a las bases, corta al otro lado no básico en su punto medio, y esa paralela limitada en los dos puntos medios, es igual a la semisuma de las bases.* Se llama paralela media. Es consecuencia inmediata del teorema anterior, aplicado a los dos triángulos en que una diagonal divide al trapecio (figura 133).

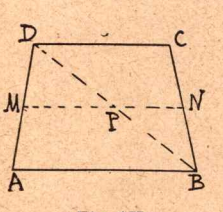


Fig. 133

$$MP = \frac{1}{2}\,AB \quad » \quad PN = \frac{1}{2}\,DC \quad » \quad MN = \frac{1}{2}\,(AB + DC)$$

86. Triángulos de lados paralelos o perpendiculares

·1. *Angulos de lados paralelos. Si dos ángulos convexos tienen sus lados respectivamente paralelos y dirigidos en el mismo sentido, o en sentido contrario, son iguales; y si un par de lados está dirigido en el mismo sentido, y el otro en sentido contrario, son suplementarios.*

En efecto, sean O y O' los vértices de los ángulos y tracemos la recta OO'. Si dos rayos que parten de O y de O' (fig. 134) están en la misma recta OO', ya sabemos cuando se dice que son del mismo sentido, o de sentido contrario (4).

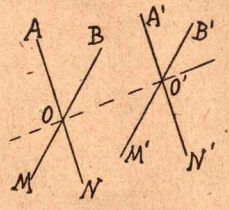


Fig. 134

Pero dos rayos paralelos que parten de O y O' y que no están en OO', se dice que son del mismo sentido si están en el mismo semiplano respecto de la recta OO', y en sentido contrario, si están en distinto semiplano. Los ángulos paralelos, y del mismo sentido, forman con la secante OO' ángulos correspondientes iguales (**50** ·1). Por esto dos ángulos, tales como AOB y A'O'B' que tienen sus lados paralelos y dirigidos en el mismo sentido, son iguales, pues sumas o diferencias de ángulos iguales son iguales. Y si son de lados paralelos y dirigidos en sentido contrario, como los MON y A'O'B', también serán iguales, pues ambos son iguales al opuesto por el vértice de uno de ellos. Y por fin, si se trata de ángulos tales como los AOM y A'O'B' que tienen sus lados paralelos, y un par de ellos en el mismo sentido, y el otro en sentido contrario, serán suplementarios, porque uno de ellos es igual a un adyacente del otro.

·2. *Angulos de lados perpendiculares. Si dos ángulos convexos tienen sus lados respectivamente perpendiculares, son iguales o suplementarios.*

Supongamos, primero, que los dos ángulos son del mismo vértice, como por ejemplo, ABC y A'BC' de la figura 135. Puede suceder que de esos dos ángulos el uno esté contenido en el otro, lo cual ocurrirá siempre que el lado BA', perpendicular a BA, esté en el mismo semiplano que BC respecto de BA; y el BC', en el mismo semiplano que BA respecto de BC. Entonces los ángulos son suplementarios, porque es $A\hat{B}C + C'\hat{B}A' = A\hat{B}A' + A'\hat{B}C + C'\hat{B}A' = A\hat{B}A' + C\hat{B}C' = 2$ rectos.

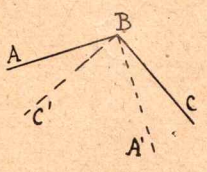


Fig. 135

Puede también suceder que los ángulos sean exteriores uno al otro, aún teniendo el mismo vértice, como ocurrirá a uno de los ángulos de la figura anterior y el opuesto por el vértice del otro. Y en tal caso también son suplementarios, por ser iguales dos opuestos por el vértice.

Y por fin, si los dos ángulos tienen una parte común, y otras partes no comunes, serán iguales; porque el adyacente de uno es suplementario del otro. Si los ángulos no tienen el mismo vértice, se podrá trazar por un vértice del uno, rayos paralelos a los lados del otro.

·3. *Triángulos de lados paralelos o perpendiculares. Dos triángulos tales que los lados del uno sean respectivamente paralelos o perpendiculares a los del otro, son semejantes.* Para demostrarlo basta probar que tienen sus ángulos iguales. En efecto, los ángulos de uno de los triángulos tienen que ser respectivamente iguales o suplementarios a los del otro. Pero no es posible que los tres ángulos de uno sean suplementarios a los del otro; porque entonces entre los seis ángulos valdrían seis rectos, y no valen más que cuatro. Ni tampoco es posible que dos ángulos del uno sean suplementarios a otros dos ángulos del otro, porque entre estos cuatro ángulos ya valdrían cuatro rectos, y no quedaba nada para los otros, luego es necesario que dos ángulos de un triángulo sean respectivamente iguales a dos del otro; en cuyo caso los terceros también lo serán, y los triángulos son semejantes (**83** ·1).

87. Rectas antiparalelas

·1. *Semejanza directa e inversa.* En triángulos que tienen un ángulo común, o que al menos están situados en el mismo plano, se puede distinguir entre semejanza directa e inversa según que sus ángulos resulten directamente iguales o inversamente iguales al considerar los triángulos en dos órdenes correspondientes: ABC y A'B'C' (24).

Y así, en la figura 136, se tienen los triángulos inversamente semejantes $\overset{C}{A}B \sim \overset{C}{A'}B'$.

·2. *Rectas antiparalelas. Dos rectas se dice que son antiparalelas con relación a un ángulo, cuando cortan a los lados del ángulo o a sus prolongaciones en puntos que forman con el vértice, dos triángulos inversamente semejantes.*

Lo son, por ejemplo, las rectas AB y A'B' de la figura 136.

Como los dos triángulos semejantes tienen sus ángulos respectivamente iguales, resulta que el ángulo B' que una de las antiparalelas forma con el lado CA, es igual al B que la otra forma con el otro lado CB.

·3 La *propiedad fundamental* de las antiparalelas es la siguiente:

Si dos rectas son antiparalelas con relación a un ángulo, los productos de las distancias desde el vértice hasta los dos puntos en que las antiparalelas cortan a cada lado del ángulo, son iguales. Pues como se puede ver en la figura 136, la semejanza de triángulos $\overset{C}{A}B \sim \overset{C}{A'}B'$ conduce a la proporción $\frac{CA}{CA'} = \frac{CB}{CB'}$, y de aquí resulta:

$$CA \times CB' = CB \times CA'$$

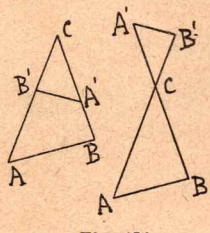


Fig. 136

Ejercicios

Demostrar directamente el teorema del triángulo de lados mitad, uniendo los tres puntos medios de los lados de un triángulo, de dos en dos.

Demostrar que la recta que une los puntos medios de los lados no básicos de un trapecio es paralela a las bases.

Enunciar varios casos de semejanza de triángulos isósceles.

Demostrar que la paralela a la base de un triángulo isósceles es también antiparalela de esa base, con relación al vértice opuesto.

LECCION 16

RELACIONES METRICAS EN EL TRIANGULO Y LA CIRCUNFERENCIA

88. Relaciones en el triángulo rectángulo

·1. *Relación entre los catetos y sus proyecciones sobre la hipotenusa.* Si en un triángulo rectángulo ABC (fig. 137), trazamos la altura *h*, que parte del vértice del ángulo recto A, el pie de esa altura divide a la hipotenusa en dos segmentos *m* y *n*, que se llaman respectivamente proyección del cateto *b* y del *c* sobre esa hipotenusa *a;* como ya veremos al definir las proyecciones.

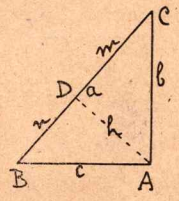


Fig. 137

Esa altura *h*, y un cateto *c*, son antiparalelas respecto del ángulo opuesto C, pues forman los triángulos rectángulos inversamente semejantes $_{B}^{C}{}_{A}^{C} \sim {}_{A}^{C}{}_{D}^{C}$ cuya semejanza es consecuencia de tener un ángulo agudo igual, el $\hat{C}$, y ser rectángulos.

Aplicando la propiedad fundamental de las rectas antiparalelas (**87** ·3), o directamente la proporcionalidad de lados, se deduce :

$$b^2 = m \cdot a$$

y para el otro cateto : $c^2 = n \cdot a$

pues también *b* y *h* son antiparalelas, pero respecto de B. Luego:

Un cateto es medio proporcional entre la hipotenusa y la proyección del cateto sobre ella.

Recuérdese que esa frase *medio proporcional* hace referencia a que el *b*, por ejemplo, es el medio repetido de una proporción continua $\frac{a}{b} = \frac{b}{m}$ en la cual los extremos son *m* y *a;* proporción equivalente a la igualdad $b^2 = m \cdot a$.

·2. *Teorema de Pitágoras.* Si sumamos miembro a miembro las dos igualdades anteriores se obtiene

$$b^2 + c^2 = m \cdot a + n \cdot a = (m + n) \cdot a = a \cdot a = a^2$$

o sea : *el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.* Se expresa también por estas igualdades :

$$a^2 = b^2 + c^2 \text{ » } a = \sqrt{b^2 + c^2} \text{ » } b^2 = a^2 - c^2 \text{ » } b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

·3. *Valor de la altura perpendicular a la hipotenusa.* Si nos fijamos ahora en la semejanza de triángulos $\overset{A}{B}D \sim \overset{C}{A}D$ que son semejantes al total ABC, y por tanto, semejantes entre sí, resulta $\frac{m}{h} = \frac{h}{n}$; *la altura* h *es media proporcional entre los segmentos en que divide a la hipotenusa :* $h^2 = m \cdot n$.

89. Relaciones en un triángulo cualquiera

·1. *Relaciones entre los tres lados.* Si en un triángulo ABC (figura 138), trazamos una altura *h*, su pie puede estar, o en un extremo del lado al cual es perpendicular, o en el interior de este lado, o en una de sus prolongaciones. En el primer caso, el triángulo es rectángulo, y ya hemos estudiado la relación entre sus lados.

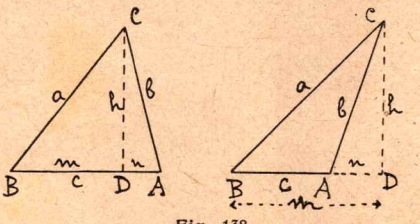


Fig. 138

En el segundo caso, la altura divide al triángulo en dos triángulos rectángulos; apli-

cando a los cuales el teorema de Pitágoras se tiene en la figura ;

$$a^2 = h^2 + m^2 = (b^2 - n^2) + (c - n)^2 = b^2 - n^2 + c^2 + n^2 - \\ - 2\,c\,n = b^2 + c^2 - 2\,c\,n$$

Y en el tercer caso también se forman dos triángulos rectángulos, en los cuales se tiene igualmente :

$$a^2 = h^2 + m^2 = (b^2 - n^2) + (c + n)^2 = b^2 - n^2 + c^2 + n^2 + \\ + 2\,c\,n = b^2 + c^2 + 2\,c\,n$$

Luego : *el cuadrado de un lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, más o menos el duplo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él;* siendo *más*, cuando el ángulo opuesto al lado que se calcula es *obtuso*, y *menos* cuando es *agudo*.

·2. *Idea sobre el cálculo de alturas.* Si en el triángulo ABC, nos fijamos en los dos triángulos rectángulos, veremos que se verifica :

$$a^2 = h^2 + m^2$$
$$b^2 = h^2 + n^2$$
$$m \pm n = c$$

Si en este sistema de tres ecuaciones, eliminamos las cantidades *m* y *n*, obtendremos una ecuación que relaciona la altura *h* y los lados *a*, *b* y *c;* ecuación que permite expresar la altura en función de los lados. Como el cálculo es pesado, e insistiremos por método más breve en la Trigonometría, no lo desarrollamos.

90. Propiedades de las bisectrices de un triángulo

·1. Si en un triángulo ABC trazamos por uno de sus vértices, C, las dos bisectrices, interior CD, y exterior CE, que serán perpendiculares (**31** ·6), cortarán en general, a la recta que contiene al lado opuesto, en dos puntos D y E; y *las distancias*

desde cada uno de ellos a los extremos del lado, son proporcionales a los otros dos lados, es decir : (fig. 139)

$$\frac{DB}{DA} = \frac{CB}{CA} = \frac{EB}{EA}$$

El caso en que la bisectriz exterior resulta paralela, ya lo veremos.

Para demostrar este teorema tracemos por el vértice B, comprendido entre los pies de las bisectrices, rectas paralelas a ellas, y llamaremos G y F los puntos en que estas paralelas cortan a la recta que contiene el lado opuesto A C. Se forman así dos triángulos que son isósceles, el BGC y el BCF, pues los puntos G y F son simétricos del B respecto de cada bisectriz (**78** ·4). Por ser isósceles dichos triángulos será GC = CB = CF. Aplicando ahora los teoremas de segmentos proporcionales a las concurrentes en A, cortadas por las paralelas CD y FB, resulta (**82** ·3):

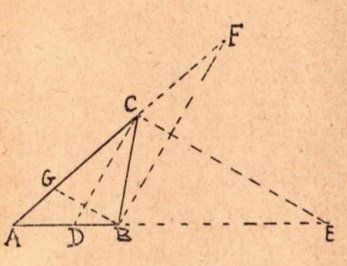


Fig. 139

$$\frac{DB}{DA} = \frac{CF}{CA} = \frac{CB}{CA}$$; y con las paralelas BG y EC:

$$\frac{EB}{EA} = \frac{CG}{CA} = \frac{CB}{CA}$$

91. Potencia de un punto respecto de una circunferencia

·1. *El concepto de potencia de un punto.* Supongamos en el plano de una circunferencia un punto A, ya interior, ya exterior a la misma Si trazamos dos secantes que concurran en ese punto y unimos cada punto de intersección de una secante, con un punto de intersección de la otra secante, las dos rectas

de unión resultan antiparalelas con relación a uno de los cuatro ángulos formados por las secantes; pues se forman dos triángulos inversamente semejantes, a saber: $\overset{N}{A}Q = \overset{M}{A}P$ ya que tienen los ángulos en A iguales y los $\hat{M}$ y $\hat{N}$ también iguales, porque están inscritos en la circunferencia e interceptan el mismo arco (fig. 140).

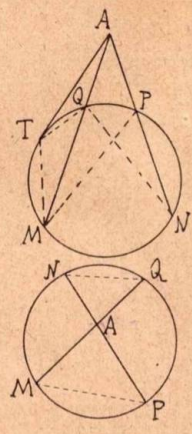


Fig. 140

Aplicando, pues, la proporcionalidad entre los lados, o la propiedad de las antiparalelas, se tiene (**87** ·3):

$$AP \times AN = AQ \times AM$$

Además, si el punto A es externo, y trazamos la tangente, uniendo los puntos de intersección de una secante con el de contacto de la tangente, también se forman otras dos rectas antiparalelas, que son las de unión, y también se verifica:

$$AT^2 = AQ \times AM$$

Todo lo cual se expresa por el siguiente teorema que define la potencia: *Si por un punto del plano de una circunferencia trazamos secantes, y si se puede, tangentes, el producto de las distancias desde ese punto a los de intersección de la circunferencia con cada secante es constante, e igual al cuadrado de la distancia desde ese punto al de contacto de una tangente; producto que se llama potencia del punto respecto de la circunferencia.*

Si el punto estuviera en la misma circunferencia, se considera de potencia nula.

·2. *Cálculo de la potencia.* La potencia de un punto respecto de una circunferencia se puede calcular fácilmente en función de la distancia del punto al centro, que llamaremos *d*, y del radio, *r*. Para ello, si el punto está fuera, se traza la tangente, y se une el centro con el punto de contacto. Se forma así un triángulo rectángulo en el cual el segmento AT de tangente

es un cateto, y aplicando el teorema de Pitágoras (88 ·2), se tiene : Potencia de $A = AT^2 = d^2 - r^2$.

Y si el punto es interior, trazaremos el diámetro que pasa por el punto A', y la cuerda perpendicular a ese diámetro (fig. 141); uniendo entonces un extremo de esa cuerda con el centro, se forma también un triángulo rectángulo, en el cual la semicuerda $\frac{c}{2}$ es un cateto y aplicando el teorema de Pitágoras, resulta :

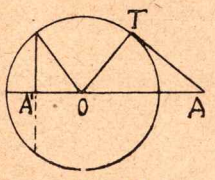


Fig. 141

$$\text{Potencia de } A' = \left(\frac{c}{2}\right)^2 = r^2 - d^2$$

92. Relaciones métricas entre cuerdas y diámetros

·1. Si desde un punto de una circunferencia trazamos dos cuerdas que terminen en los extremos de un diámetro, se forma con este diámetro un triángulo rectángulo (fig. 142), en el cual se verificarán las propiedades métricas estudiadas (88), luego :

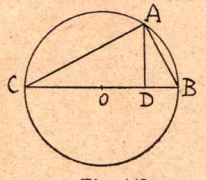


Fig. 142

a) *Toda cuerda es media proporcional entre el diámetro y la proyección de la cuerda sobre el diámetro que pasa por su extremo.*

$$CA^2 = CB \times CD$$

b) *El cuadrado de un diámetro es igual a la suma de los cuadrados de dos cuerdas que partiendo de sus extremos vayan a un mismo punto de la circunferencia.*

$$CB^2 = CA^2 + AB^2$$

c) *La semicuerda perpendicular a un diámetro es medio proporcional entre los segmentos en que divide a este diámetro.*

$$DA^2 = DB \times DC$$

Este último teorema es también consecuencia inmediata del teorema de la potencia aplicado al punto D (91).

93. Eje radical de dos circunferencias y centro radical de tres.

·1. Si tenemos dos circunferencias secantes, la recta que pasa por los puntos de intersección tiene la propiedad de que es la misma la potencia de todos sus puntos respecto de ambas circunferencias, puesto que esa potencia será igual al producto de las distancias del punto de que se trate, a los de intersección de las circunferencias (91). A esa secante común se le llama *eje radical* de las dos circunferencias.

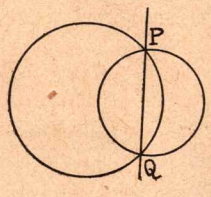


Fig. 143

En general, se corten o no se corten dos circunferencias de un plano, se puede demostrar fácilmente el siguiente teorema:

El lugar geométrico de los puntos de un plano que tienen igual potencia respecto de dos circunferencias del mismo, es una recta perpendicular a la que une los centros y que se llama eje radical de las dos circunferencias (fig. 144).

Pues tomando un punto P que tenga igual potencia respecto de las dos circunferencias dadas, y uniéndolo con los centros, se formará un triángulo, en el cual las diferencias de los cuadrados de los lados que concurren en dicho punto son constantes al variar el punto, ya que si llamamos a esas distancias D y *d*, y llamamos R y *r* a los radios, esa potencia será la diferencia absoluta entre D^2 y R^2 para la una, y d^2 y r^2 para la otra (**91** ·2), luego siendo

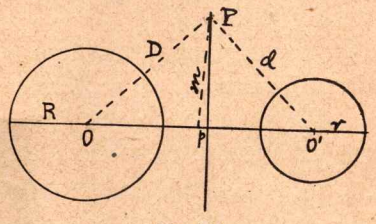


Fig. 144

$$D^2 - R^2 = d^2 - r^2 \quad \text{será} \quad D^2 - d^2 = R^2 - r^2$$

Ahora bien, si en dicho triángulo trazamos la mediana que une el punto medio del segmento de los centros (c) con el vértice

opuesto, podremos expresar D y *d* en función de esa mediana *m* y de su proyección *p* sobre la recta de los centros, y será (89 ·1).

$$D^2 = m^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{c}{2} \cdot p \quad » \quad d^2 = m^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{2} \cdot p$$

Si estas dos ecuaciones las sumáramos miembro a miembro, podríamos deducir el valor de la mediana en función de los lados, pero si las restamos miembro a miembro se tiene

$$D^2 - d^2 = 2 \cdot p \cdot c;$$

lo cual nos dice que mientras sea constante el primer miembro tendrá que serlo el segundo, y por tanto, *p*, así que : *el lugar geométrico de los puntos de un plano, cuya diferencia de distancias a dos fijos del mismo plano es constante, es una recta perpendicular a la que une los puntos fijos.* Y en ese caso están los puntos de igual potencia respecto de ambos círculos.

·2. Si nos dieran *tres circunferencias*, cuyos centros no estén en línea recta, el eje radical de la primera y la segunda, y el de la segunda y la tercera, se cortan, por ser perpendiculares a otras dos rectas que se cortan, y el punto de concurso será de igual potencia respecto de las tres circunferencias, por lo cual pasará también por él el eje radical de las circunferencias primera y tercera.

A ese punto, que tiene igual potencia respecto de las tres circunferencias, se le llama centro radical de las tres.

En el caso de que las tres circunferencias tengan sus centros en línea recta, no existe centro radical de las tres que sea un punto propiamente tal, porque los ejes radicales de las circunferencias dadas, consideradas de dos en dos, son paralelos.

94. Aplicación a problemas gráficos y de cálculo

·1. *Construcción de la media proporcional de dos segmentos.* Dados dos segmentos, los teoremas anteriores permiten construir el que es medio proporcional entre ellos, es decir,

aquel cuyo cuadrado es igual al producto de ellos. En la figura 145 están indicadas tres construcciones distintas (92) :

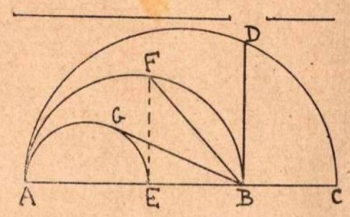


Fig. 145

a) La primera consiste en sumar los segmentos; construir una semicircunferencia que tenga esa suma como diámetro, y trazar la semicuerda perpendicular a ese diámetro por el punto común a los segmentos sumados. Será :

$$BD^2 = BC \times BA$$

b) La segunda construcción se efectúa restando los segmentos, construyendo una semicircunferencia sobre el minuendo y trazando por el extremo común B, de los segmentos, una cuerda BF, cuya proyección sobre el diámetro sea el segmento sustraendo. Será : $BF^2 = BE \times BA$.

c) La tercera construcción también se efectúa restando los segmentos, pero la semicircunferencia o arco que se trace ha de pasar por los extremos del segmento diferencia, en cuyo caso la tangente, trazada por el punto común a los dos segmentos, dará la media proporcional, pues se tiene (91) : $BG^2 = BE \times BA$.

·2. *Problemas gráficos sobre los triángulos.* En los triángulos, y por consiguiente en los polígonos, se pueden proponer multitud de problemas gráficos, combinando las diversas magnitudes de los mismos. Como ejemplo indiquemos la resolución de este problema.

Conocidas en longitud la altura, bisectriz y mediana que parten de un mismo vértice de un triángulo, construir este triángulo.

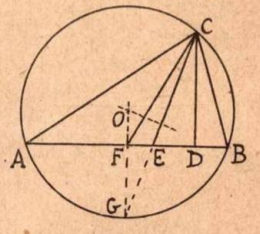


Fig. 146

Para estudiar la resolución de problemas como éste conviene *suponer el problema resuelto*, y para ello, en nuestro caso, construyamos un triángulo arbitrario ABC (fig. 146) y tracemos la altura CD, bisectriz CE, y mediana CF, que parten de un vértice C. Conocidos estos tres segmentos, si sobre una recta indefinida trazamos perpendicularmente

la altura DC, enseguida podemos determinar los puntos E y F. Para conocer los otros dos vértices A y B, veamos si podemos determinar la circunferencia circunscrita, cuyo centro estará, desde luego, en la mediatriz FO, que podemos trazar y cortará a la prolongación de la bisectriz CE en un punto G perteneciente a dicha circunferencia, ya que los ángulos que la bisectriz forma con los lados AC y BC son inscritos e iguales y deben interceptar arcos iguales. Por tanto, la mediatriz del segmento CG acabará de determinar el centro de la circunferencia circunscrita y el triángulo.

·3. *Cálculo de los elementos de un triángulo.* El cálculo de los elementos desconocidos de un triángulo, cuando se conocen suficientes datos para determinarlo, es un problema mejor resuelto que el de las construcciones gráficas, y constituye una ciencia aparte, llamada Trigonometría, de la que trataremos.

Pero muchos problemas de cálculo de figuras se pueden resolver por métodos puramente geométricos, para lo cual ayuda bastante el :

·4. *Teorema de las isogonales : el producto de dos lados de un triángulo es igual al producto de dos isogonales, que parten del vértice común, limitadas la una en el lado opuesto, y la otra en la circunferencia circunscrita.* Isogonal quiere decir igual ángulo, pues la una forma con un lado igual ángulo que la otra forma con el otro lado, aunque de sentido contrario.

De aquí que las dos isogonales, tales como las CH y CD (fig. 147) forman dos triángulos semejantes con los lados, en este orden $\overset{C}{A}\overset{}{D} \sim \overset{C}{H}\overset{}{B}$ puesto que los ángulos en C son iguales por ser las rectas isogonales, y los ángulos en B y D también son iguales por inscritos que interceptan arcos iguales. Se deduce :

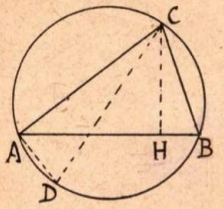


Fig. 147

$$\frac{CA}{CH} = \frac{CD}{CB}, \text{ o sea } CA \times CB = CD \times CH.$$

Este teorema tiene muchas aplicaciones.

·5. Así, por ejemplo, *la bisectriz interior es isogonal de si*

misma, y las dos bisectrices exteriores de un mismo vértice son también isogonales.

Aplicando el teorema de las isogonales a la bisectriz interior o a la exterior, más el teorema estudiado anteriormente referente al pie de esa bisectriz (90), más el de la potencia de un punto con relación al círculo circunscrito, aplicado también a ese pie, se obtienen tres ecuaciones que permiten, por eliminación, hallar el valor de una bisectriz en función de los lados.

·6. *La altura tiene por isogonal al diámetro de la circunferencia circunscrita que pasa por el mismo vértice que ella;* pues si en la figura 147 fuese CD diámetro, el ángulo en A sería recto, y si también lo fuera el ángulo en H, serían iguales los ángulos en C, pues es $\hat{D} = \hat{B}$.

·7. Y por fin las medianas tienen por isogonales a otras rectas llamadas *simedianas*. Mas para calcular el valor de las medianas en función de los lados, debe seguirse el método indicado al tratar del eje radical de dos circunferencias. El detalle de estos cálculos lo proponemos como ejercicio.

Ejercicios

Demuéstrese que el triángulo cuyos lados vienen medidos por los números 3, 4, y 5 es rectángulo.

Trácense dos circunferencias exteriores y otra secante a las dos, y por medio de las cuerdas comunes búsquese un punto del eje radical de las dos primeras, y trácese luego ese eje.

Demuéstrese que en un triángulo de lados a, b, c, la altura h_c, mediana m_c, y bisectriz w_c, vienen dadas por las fórmulas:

$$h_c^2 = \frac{4\,a^2\,c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}{4\,c^2} \quad \text{»} \quad m_c = \frac{\sqrt{2\,(a^2 + b^2) - c^2}}{2}$$

$$W_c^2 = a\,b - \frac{c^2\,a\,b}{(a+b)^2}$$

en el supuesto de que se tracen desde el vértice opuesto al c.

LECCIÓN 17

FIGURAS SEMEJANTES

95. El concepto de figuras semejantes

Definidos anteriormente los triángulos semejantes (81), daremos ahora la definición general de semejanza, que comprenderá como un caso particular a la anterior, y de la cual serán también otro caso particular los polígonos semejantes, que a continuación estudiamos.

·1. *Definición. Dos figuras las llamaremos semejantes cuando entre sus puntos se puede establecer una correspondencia biunívoca, tal que los segmentos que unen puntos de la primera figura son proporcionales a los que unen puntos homólogos de aquéllos.*

Es decir, que entre los puntos de ambas figuras se pueda establecer la correspondencia biunívoca : $\begin{matrix} A, B, C, D, \ldots \\ A', B', C', D', \ldots \end{matrix}$ que verifique las siguientes relaciones :

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{AD}{A'D'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \ldots$$

lo cual se puede también expresar diciendo que *la razón entre un segmento que una dos puntos de la primera figura y el que une los puntos homólogos es constante.* A esa razón constante se llama *razón de semejanza* de la primera figura a la segunda.

Para justificar esta definición veamos que comprende como caso particular a la que dimos de triángulos semejantes (81). Supongamos para ello dos triángulos ABC y A'B'C' (figura 148), que tienen por hipótesis sus ángulos respectivamente iguales y sus lados proporcionales. Para establecer entonces una correspondencia biunívoca entre sus puntos, hagamos corresponder a cada punto D, del primer triángulo, otro punto D', del segundo, que lo hallaremos construyendo en el interior del ángulo A' un rayo que forme con A'B' un ángulo igual al DAB, y en el interior del ángulo B' otro rayo que forme con B'A' un ángulo igual al DBA. Esos dos rayos se cortarán en un punto D', interior al triángulo A'B'C' (9), que es el homólogo del D. Pero ese punto D' forma un triángulo A'B'D' de lados proporcionales a los del ABD (83 ·1), por lo cual es $\frac{DA}{D'A'} = \frac{AB}{A'B'}$

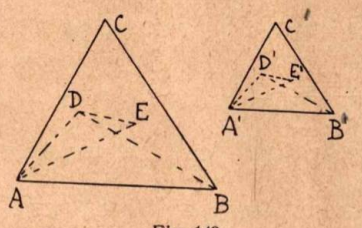


Fig. 148

Si ahora consideramos otros dos puntos homólogos E y E', también será $\frac{EA}{E'A'} = \frac{AB}{A'B'}$ y $E\hat{A}B = E'\hat{A}'B'$ por lo cual, se tendrá : $\frac{DA}{D'A'} = \frac{EA}{E'A'}$ y $D\hat{A}E = D'\hat{A}'E'$; y en fin, de los triángulos ADE y A'D'E' se deduce $\frac{DE}{D'E'} = \frac{AD}{A'D'} = \frac{AB}{A'B'} \cdots$ (83 ·2).

96. Propiedades de las figuras semejantes

·1. *La semejanza ahora definida tiene las tres propiedades : reflexiva, simétrica y transitiva.* En efecto :

a). Si a los puntos de una figura les hacemos corresponder ellos mismos, se tendrá una correspondencia biunívoca en la cual se verifica : $\frac{AB}{AB} = \frac{AC}{AC} = \frac{BC}{BC} = ..$ luego *toda figura es semejante a sí misma.*

b). Si a los puntos A, B, C,... de una figura F les hacemos corresponder los A', B', C',... de otra F', que verifica $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = \ldots$ de estas igualdades se deducen estas otras $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = ..$

luego *si* F *es semejante a* F', *también* F' *es semejante a* F.

c). Asímismo, si F es semejante a F', y por tanto es $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = \ldots$ y F' lo es a F", por lo cual es

$$\frac{A'B'}{A''B''} = \frac{A'C'}{A''C''} = \frac{B'C'}{B''C''} = \ldots$$

multiplicando estas igualdades por las anteriores se deducen $\frac{AB}{A''B''} = \frac{AC}{A''C''} = \frac{BC}{B''C''} = \ldots$ luego también F será semejante a F".

Propiedad que se puede enunciar, teniendo en cuenta la b): *dos figuras semejantes a una tercera son semejantes entre sí.*

·2. *Dos figuras iguales son semejantes.* Pues entre sus puntos se puede establecer una correspondencia biunívoca, siendo la razón de semejanza la unidad (46 ·1).

·3. *Dos segmentos cualesquiera* AB, *y* A'B' *se pueden considerar como dos figuras semejantes cuya razón de semejanza es* $\frac{AB}{A'B'}$. Basta para ello hacer corresponder a cada punto C del primer segmento, otro C' del segundo, tal que verifique $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$, (figura 149).

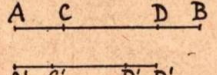


Fig. 149

Este punto C' es un punto determinado, porque en una proporción en que se dan tres términos, el cuarto viene expresado por los otros tres $A'C' = \frac{AC \times A'B'}{AB}$. Además, si es D' el punto correspondiente a otro D, será $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AD}{A'D'}$ y aplicando las leyes de sumas de las proporciones se tendrá:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{AD}{A'D'} = \frac{AD - AC}{A'D' - A'C'} = \frac{CD}{C'D'}$$

lo que prueba que la correspondencia establecida cumple las condiciones de las figuras semejantes.

·4. *Si dos figuras son semejantes y una de ellas tiene tres puntos* A, B, C *en línea recta, estando* C *entre* A *y* B, *los homólogos de la otra,* A', B', C', *también estarán en línea recta, y* C' *entre* A' *y* B'.

Pues los tres segmentos AB, AC y CD serán proporcionales a los A'B', A'C' y C'B'; y aplicando las leyes de sumas, de las proporciones, será :

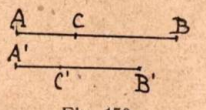


Fig. 150

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{CB}{C'B'} = \frac{AC + CB}{A'C' + C'B'}$$

(fig. 150); comparando ahora la primera razón con la última se ve que tienen iguales los numeradores por estar C entre A y B, luego también será $A'B' = A'C' + C'B'$, lo cual no puede ser más que estando C' en el interior del segmento A'B' (46 ·2).

·5. *Si dos figuras* F *y* F' *son semejantes, a toda parte* f *de la primera corresponde otra* f' *de la segunda, semejante a la* f, *siendo la misma la razón de semejanza de* F a F', *que de* f *a* f'.

Pues entre los puntos de *f* y *f'* se puede establecer la correspondencia biunívoca que exige la definición de figuras semejantes.

En particular, a todo *segmento* AB de F corresponde un *segmento* A'B' de F; pues a puntos situados entre A y B corresponden puntos situados entre A' y B', y recíprocamente (·4). Por análoga razón, a toda *recta* o *semirrecta* de F corresponde una *recta* o *semirrecta* de F' (Véase lección 1.ª).

Veamos ahora la propiedad fundamental de los ángulos.

·6. *Si dos figuras* F *y* F' *son semejantes, todo ángulo* BAC, *determinado por tres puntos de* F (fig. 151), *es igual al ángulo* B'A'C', *determinado por los tres puntos homólogos en* F'.

Pues debiéndose verificar las proporciones

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$

los triángulos ABC y A'B'C' tendrán sus ángulos, respectivamente, iguales (83 ·3).

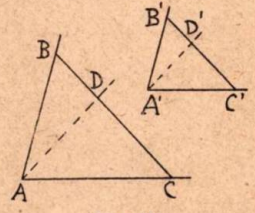


Fig. 151

Esto mismo demuestra lo siguiente :

·7. *Todo triángulo* ABC, *cuyos vértices son puntos de* F, *es semejante al* A'B'C' *cuyos vértices son los puntos homólogos en* F'.

97. Semejanza entre rectas y entre planos

·1. Dadas dos rectas, confundidas o no, podemos hacer corresponder a dos puntos A y B de la primera otros dos A' y B' de la segunda, y con solo esto podemos definir una semejanza entre las dos rectas, según la cual a cada punto C de la primera le corresponde otro punto C' de la segunda, tal que sea

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AB}{A'B'}$$

Las dos series rectilíneas constituídas por los puntos de la primera recta y los de la segunda son series semejantes, pues dados dos puntos C, D y sus homólogos, se tiene (fig. 149):

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{AD}{A'D'} = \frac{AD - AC}{A'D' - A'C'} = \frac{CD}{C'D'}$$

·2. En el caso en que las dos rectas estén confundidas se puede demostrar que al ser el vector $\overline{AB}$ del mismo sentido que el $\overline{A'B'}$, lo mismo ocurrirá con otros dos vectores homólogos $\overline{CD}$ y $\overline{C'D'}$, llamándose las figuras *directamente* semejantes, y en el caso inverso, se llamarán *inversamente* semejantes.

·3. Supongamos ahora dos planos, confundidos o no, y hagamos corresponder a tres puntos A, B y C que son vértices de un triángulo situado en uno de ellos, otros tres puntos A', B', C', vértices de otro triángulo situado en el segundo plano, y semejante al ABC. Con esto solo podemos definir una semejanza entre los dos planos, sin más que hacer corresponder a cada punto D del primero, otro punto D' del segundo, de modo que los triángulos ABD y A'B'D' sean semetes en este orden $_{A}^{D}{}_{B} \sim {}_{A'}^{D'}{}_{B'}$ y de tal modo elegidos, que si D y C están en el mismo semiplano respecto de AB, estén también

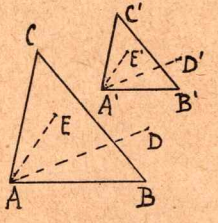


Fig. 152

D' y C' en el mismo semiplano respecto de A'B'. *Estas dos figuras planas, formadas por los puntos del primer plano, y sus homólogos del segundo, son figuras semejantes;* pues elegido otro par de puntos homólogos E y E' se verifica $\overset{E}{A}D \sim \overset{E'}{A'}D'$ ya que tienen iguales los ángulos en A y A', por ser sumas o diferencias de ángulos iguales, y tienen proporcionales los lados que los forman; será, pues,

$$\frac{AD}{A'D'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{AE}{A'E'} = \frac{DE}{D'E'}$$

·4. En el caso en que los dos planos estén confundidos en uno, se puede demostrar que si ABC y A'B'C' son triángulos directamente semejantes, lo mismo les ocurre a los formados por otros tres pares de puntos homólogos cualesquiera, y las figuras se llaman *directamente* semejantes, y en el caso inverso se llamarán *inversamente* semejantes.

·5. *Demostraciones por semejanza.* Se pueden simplificar muchas demostraciones en figuras semejantes, teniendo en cuenta que, *si un punto de una de las figuras está en una recta, su homólogo estará en la recta homóloga*, como decíamos para las figuras iguales (80). Así por ejemplo, *en dos triángulos semejantes las medianas que parten de vértices homólogos son proporcionales a los lados homólogos.* Pues los puntos medios de dos lados homólogos son puntos homólogos, y el segmento que une dos puntos de una figura es homólogo del que une los puntos homólogos de aquéllos.

Lo mismo ocurre con las *bisectrices*, las cuales serán homólogas por formar ángulos, respectivamente, iguales con rectas homólogas, y con las *alturas*, que forman ángulos rectos con rectas homólogas, etc.

98. Caso particular de las figuras semejantes

·1. Dado un punto O en el plano de una figura F, construyamos otra figura F', cuyos puntos se correspondan con los de

F, de tal manera, que las rectas AA', BB'... que unen pares de puntos homólogos pasen todas por el punto O, y sean iguales las razones

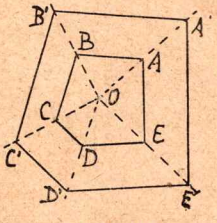


Fig. 153

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{OC}{OC'} = \dots$$

no sólo en valor absoluto, sino en signo, lo cual quiere decir, que si O es interior al segmento AA', tiene que serlo también al BB', al CC'..., etc., y si O está en una prolongación de AA', también esté en prolongación de BB' y de CC'..., etc. Las dos figuras F y F' son entonces semejantes, pues se verifica (**83** ·2):

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{OC}{OC'} = \frac{BC}{B'C'} = \dots$$

y por estar en la posición dicha se llaman *homotéticas* respecto del *centro* de homotecia O. Llámanse homotéticas *directas* cuando el centro de hometecia es exterior al segmento que une dos puntos homólogos, y hometéticas *inversas* cuando es interior.

Cuando la razón de semejanza es la unidad, las figuras homotéticas, o se confunden, o son simétricas respecto del centro (76).

La propiedad más importante de estas figuras es que *las rectas homólogas son paralelas*. Pues por ejemplo, la semejanza $_{A}^{O}{}_{B} \sim {}_{A'}^{O}{}_{B'}$ nos dice que son iguales los ángulos homólogos $\hat{B} = \hat{B}'$, y que AB es paralela a A'B', ya que ambas forman ángulos iguales con OB'.

Por eso, *para construir el polígono homotético del* ABCDE, *dada la razón de homotecia*, se busca, por una cuarta proporcional, el punto A', se traza por él la A'B', paralela a la AB; por B', la paralela a BC, etc.

99. Polígonos semejantes

·1. *Condición general de semejanza de polígonos convexos.*

Si dos polígonos convexos se pueden descomponer por diagonales que partan de un vértice de cada uno en el mismo número de triángulos semejantes, y semejantes dispuestos, los polígonos son semejantes.

Supongamos, en efecto, un polígono ABCDEF (fig. 154), Tracemos las diagonales que parten de un vértice A, las cuales descompondrán al polígono en (n—2) triángulos, siendo *n* el número de lados del polígono (45). Construyamos un triángulo semejante al ABC, y cuya razón de semejanza con el dado, sea $\frac{m}{p}$. Basta para ello construir la cuarta proporcional indicada en esta proporción $\frac{A'B'}{AB} = \frac{m}{p}$ y sobre ese segmento, cuarto proporcional A'B', construir dos ángulos iguales, respectivamente, a los ángulos en A y en B del triángulo ABC. Se tendrá entonces $_{A}^{C}B \sim {}_{A'}^{C'}B'$ (83 ·1). Constrúyase luego sobre A'C' otro triángulo tal que sea $_{A}^{D}C \sim {}_{A'}^{D'}C'$ y sucesivamente otros dos $_{A}^{E}D \sim {}_{A'}^{E'}D'$ » $_{A}^{F}E \sim {}_{A'}^{F'}E'$.

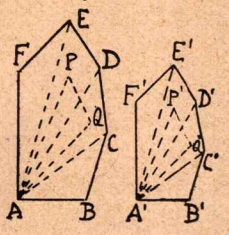


Fig. 154

Se forma entonces un nuevo polígono A'B'C'D'E'F' que está compuesto del mismo número de triángulos semejantes, y semejántemente dispuestos que los del polígono dado, y decimos que entonces los dos polígonos son semejantes. En efecto, se puede observar, desde luego, que los dos polígonos tienen sus lados proporcionales, pues se verifica sucesivamente

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{C'D'}{CD} = \ldots$$

y sus ángulos iguales por ser ángulos homólogos de triángulos semejantes o por ser sumas de ángulos homólogos. Y para

demostrar que los polígonos son semejantes, según la definición general de semejanza (95), basta hacer corresponder a cada punto P de uno de los polígonos el punto P' que está en el triángulo homólogo del que contiene al P, y de tal modo que sean los dos puntos homólogos en esos triángulos, es decir, que se verifique

$$\frac{A'P'}{AP} = \frac{AD}{A'D'} \quad » \quad P\hat{A}D = P'\hat{A}'D'.$$

Entonces, si Q y Q' son otros dos puntos homólogos, será

$$\frac{P'Q'}{PQ} = \frac{A'B'}{AB},$$

pues se verifica la semejanza de triángulos $\overset{Q}{A}P \sim \overset{Q'}{A'}P'$ ya que tienen sus ángulos en A y A' iguales, y los lados que los forman proporcionales; verificándose

$$\frac{P'Q'}{PQ} = \frac{A'P'}{AP} = \frac{A'D'}{AD} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{m}{p}.$$

·2. *Criterios de semejanza.* Si se conociera la igualdad de los ángulos y la proporcionalidad de los lados de dos polígonos convexos, éstos serían semejantes, pues las diagonales que parten de vértices homólogos los descomponen en triángulos, cuya semejanza se puede demostrar sucesivamente. Pero no es preciso conocer la igualdad de todos los ángulos y la proporcionalidad de todos los lados :

Se puede concluir que dos polígonos convexos del mismo número de lados son semejantes si se conoce la igualdad ordenada de sus ángulos y la proporcionalidad de sus lados, exceptuados :

a) *un lado y los dos ángulos adyacentes;*

b) *o dos lados y un ángulo, adyacente al menos a uno de ellos;*

c) *o tres ángulos consecutivos,*

sobre los cuales no se hace ninguna hipótesis.

Y así, por ejemplo, los dos polígonos de la figura 154 podemos concluir que son semejantes si se sabe que tienen ordenadamente iguales sus ángulos y proporcionales sus lados, exceptua-

dos los lados AF y A'F', que no se sabe si están en la misma razón que los AB y A'B', y los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{F}$ que no se sabe si son iguales a los $\hat{A}'$ y $\hat{F}'$.

Se puede, no obstante, demostrar la semejanza de los polígonos, porque al descomponerlos en triángulos por medio de diagonales que parten de A y A', los primeros triángulos ABC y A'B'C' son semejantes, ya que tienen iguales los ángulos en B y B', y proporcionales los lados que los forman. De aquí que es

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'},$$

luego también son semejantes los triángulos ACD y A'C'D', porque los ángulos en C y C', que son diferencias de ángulos iguales, serán iguales, y los lados que los forman son proporcionales; y así sucesivamente, resultando al fin la semejanza de los AEF y A'E'F' y de los polígonos.

El teorema se puede aplicar, en fin, a los *cuadriláteros* como lo hicimos al estudiar la igualdad de polígonos (**46** ·5), y demostrar que el número de condiciones de semejanza de dos polígonos de *n* lados es (2 n — 4). Lo proponemos como ejercicio.

Ejercicios

Constrúyanse dos pentágonos semejantes, cuya razón de semejanza del nuevo al antiguo sea 2/3 : primero homotéticos y luego no.

Casos de semejanza de cuadriláteros. Demúestrese que para la semejanza de dos polígonos de *n* lados hay que conocer (2 n—4) condiciones.

LECCIÓN 18

CONSTRUCCION Y CALCULO DE POLÍGONOS REGULARES

100. Polígono regular cualquiera

·1. *Si el centro de un polígono regular de* n *lados, lo unimos con los vértices, queda descompuesto el polígono en* n *triángulos isósceles e iguales* (75). El valor del ángulo en el centro será $A\hat{O}B = \frac{360^o}{n}$ y el ángulo del polígono, que será la suma de los ángulos básicos de ese triángulo isósceles, será $A\hat{B}C = 180^o - \frac{360^o}{n} = \frac{(n-2) \cdot 180^o}{n}$. Fórmula que ya obtuvimos (**75** ·4).

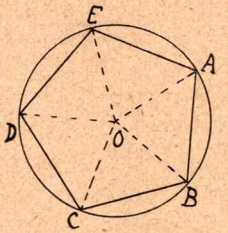


Fig. 155

·2. Resulta de aquí que *todos los polígonos regulares del mismo número de lados son semejantes.* Pues tienen los ángulos iguales y los lados proporcionales (**99** ·2).

·3. Para *construir* o *calcular* un polígono regular, es suficiente que se sepa construir o calcular el triángulo isósceles formado por un lado y los radios que van a sus extremos.

Pero en cuanto se fije el número de lados *n*, ya sabemos calcular los ángulos de ese triángulo, y también los sabemos construir si utilizamos el círculo graduado. Para que el triángulo quede determinado, y por consiguiente, el polígono, necesitaremos que se nos dé un elemento lineal; por ejemplo, el lado, o el radio, o la apotema del polígono, con el cual podremos cons-

truir ese triángulo y calcular, como luego veremos, con las tablas trigonométricas, los elementos lineales desconocidos.

Veamos ahora cómo se pueden construir algunos polígonos regulares con el solo auxilio de la regla y el compás, y cómo se pueden calcular sus elementos desconocidos sin tablas trigonométricas.

101. El triángulo equilátero y el exágono regular

·1. *Los ángulos.* Aplicando las fórmulas anteriores, o directamente, se ve enseguida que en el triángulo equilátero el ángulo en el centro vale 120°, y el ángulo del polígono 60°, y que en el exágono regular el ángulo en el centro vale 60°, y el del polígono 120°.

·2. *Construcción.* El triángulo equilátero se puede construir inmediatamente conocido el lado, pues son iguales los tres lados. Si se nos diera otro elemento lineal, por ejemplo, la apotema, un procedimiento de construcción que es general para todos los polígonos, consiste en construir un triángulo equilátero cualquiera, en el cual trazamos la apotema, por lo cual conoceremos la relación de semejanza entre el triángulo construído y el que debemos construir, que será, la razón entre las apotemas; la construcción de ese triángulo semejante al ya construído, resolverá el problema. En la práctica suele convenir construir las figuras semejantes en posición homotética (58); y así, en la figura 156 suponemos que se ha dado la apotema *a*, de un triángulo equilátero, y para construir éste, empezamos por trazar uno cualquiera ABC, en el cual hemos hallado el centro, O, y la apotema OP; tomando ahora en el semirrayo OP un segmento OP' igual a la apotema dada, *a*, bastará trazar por el punto P' una paralela al lado AB, y por los A' y B' paralelas a los otros lados, para que se obtenga un triángulo equilátero cuya apotema es la dada; triángulo semejante, y en

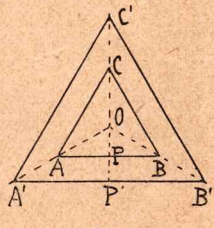


Fig. 156

posición homotética con el ABC. Es claro, que no hay necesidad de trazar las tres paralelas, sino dos, y aún una.

En cuanto al *exágono regular*, la construcción, conocido el lado, es inmediata, observando que el triángulo formado por un lado y los radios que van a sus extremos es equilátero. Resulta de esto que: *El lado del exágono regular es igual al radio*. Y para construir el polígono, cuando se da el lado, bastará construir una circunferencia de radio igual al lado y trazar 6 cuerdas iguales.

·3. *Cálculo*. La expresión fundamental para el cálculo de los elementos desconocidos de un polígono regular es la que relaciona el lado con el radio.

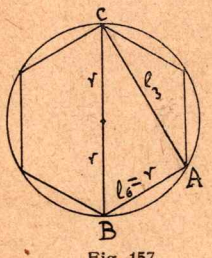


Fig. 157

Si el lado del *exágono* lo llamamos l_6 y el radio *r*, es $l_6 = r$.

Para calcular el lado l_3 del *triángulo equilátero* es lo más sencillo observar que el lado ese, forma con el del exágono regular de igual radio, y con el diámetro, un triángulo rectángulo en A (fig. 157), y será (88 ·2):

$$l_{\frac{2}{3}}^{2} = (2\,r)^2 - r^2 = 4r^2 - r^2 = 3\,r^2\,,\ \text{y}\ l_3 = r \cdot \sqrt{3}.$$

Al contrario, si nos dieran el lado y quisiéramos calcular el radio tendríamos, despejando *r*, que $r = \frac{l_3}{\sqrt{3}}$ y racionalizando el denominador será

$$r = \frac{l_3 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{l_3 \cdot \sqrt{3}}{3}$$

Para calcular la *apotema* en cualquier polígono regular basta tener en cuenta que forma con el radio y la mitad de un lado un triángulo rectángulo en el cual la apotema *a* será

$$a = \sqrt{r^2 - \frac{l^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4\,r^2 - l^2}$$

Aplicando esta fórmula al exágono y triángulo se tendrá :

$$a_3 = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - 3r^2} = \frac{1}{2}r$$

$$a_6 = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - r^2} = \frac{r\sqrt{3}}{2}$$

·4. *Observación sobre el centro del triángulo equilátero.* Como el triángulo equilátero es isósceles de tres maneras, resulta que las cuatro rectas, bisectriz, mediana y altura que parten de un vértice, y la mediatriz del lado opuesto, coinciden en una sola, que es eje de simetría del triángulo (79); y como las tres mediatrices de un triángulo concurren en un punto (62), los tres ejes de simetría del triángulo equilátero concurrirán en un punto, que es el centro.

Este punto es reunión de cuatro centros que hay por regla general en un triángulo cualquiera, y que son :

el *circuncentro*, o centro de la circunferencia circunscrita; que es el punto de intersección de dos mediatrices, y por consiguiente de las tres (62);

el *incentro*, o centro de la circunferencia inscrita, que es punto de concurso de dos bisectrices interiores, y por consiguiente de las tres (**63** ·1);

el *ortocentro*, que quiere decir punto de concurso de las alturas, las cuales concurren efectivamente en un punto, porque trazando por los vértices del triángulo rectas paralelas a los lados opuestos, se forma otro triángulo que tiene por mediatrices las alturas del primero (figura 158); y como las mediatrices de un triángulo concurren en un punto, también las alturas del otro; y por fin, el *baricentro*, o centro de gravedad, que es el punto de concurso de las tres medianas, las cuales se reúnen, y precisamente en un punto que dista de cada vértice del triángulo doble que del punto medio del lado

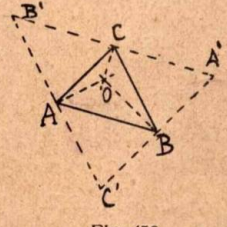


Fig. 158

opuesto; todo lo cual se prueba trazando dos medianas, AA' y BB' (figura 159) uniendo A' y B', y viendo que se forman estos triángulos semejantes, $\overset{C}{AB} \sim \overset{C}{A'B'}$ (85) cuya razón de semejanza es 2; y de aquí estos otros $\overset{O}{AB} \sim \overset{O}{A'B'}$ que dan

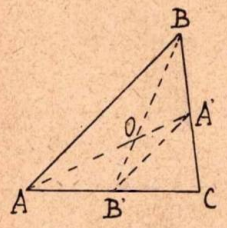


Fig. 159

$$\frac{OB}{OB'} = \frac{AB}{A'B'} = 2;$$

luego la tercera mediana pasará por O.

102. El cuadrado

1. La construcción y cálculo del cuadrado es muy sencilla. Basta recordar que se forman con las dos diagonales, cuatro triángulos, rectángulos e isósceles, en los cuales se tiene $l^2 = r^2 + r^2 = 2\,r^2$ » $l = r \cdot \sqrt{2}$. Y el radio en función del lado será $r = \frac{l}{\sqrt{2}} = \frac{l\sqrt{2}}{2}$.

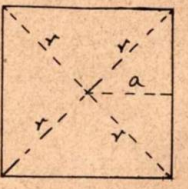


Fig. 160

Sumando dos radios se tendrá la diagonal: $d = l \cdot \sqrt{2}$ que también se podía haber hallado viendo que forma otro triángulo rectángulo isósceles con el lado, luego será $d^2 = l^2 + l^2 = 2\,l^2$ » $d = l\sqrt{2}$. Y la apotema será $a = \frac{1}{2}l$.

La construcción del cuadrado, dado el lado, se reduce a trazar dos rectas perpendiculares, tomar el lado en las dos, y por los extremos libres, como centros, trazar dos arcos que se cortan en el cuarto vértice, formándose así un cuadrado, porque se compone de dos triángulos iguales, que son rectángulos e isósceles.

Y si se da el radio se construye una circunferencia y se trazan dos diámetros perpendiculares, cuyos extremos son los vértices.

103. El Decágono y pentágono regulares

·1. *Sección áurea de un segmento. Se llama sección áurea de un segmento a la división del segmento en dos partes tales que la razón entre la menor y la mayor sea igual a la razón entre la mayor de ellas y el segmento entero;* es decir, que *la mayor sea media proporcional entre el segmento entero y la menor.* Y así, si el segmento AB = r de la figura 161 lo dividimos en dos partes tales que se tenga $\frac{CB}{AC} = \frac{AC}{AB}$ ó $\frac{r-x}{x} = \frac{x}{r}$ se habrá hecho la sección áurea del segmento o división áurea, también llamada división del segmento *en media y extrema razón.*

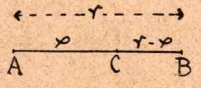


Fig. 161

A la mayor de las dos porciones, o sea la *x* de la figura, se le llama, para abreviar, *porción áurea* del segmento.

·2. *Propiedad fundamental de la sección áurea.* Apliquemos las propiedades de suma y resta a la proporción que define la porción áurea *x* de un segmento *r*, con lo cual se tendrá :

$$\frac{r-x}{x} = \frac{x}{r} = \frac{r}{x+r}$$

pues la suma de numeradores, que es $(r - x) + x = r$, es a la suma de denominadores, $x + r$, como un numerador es a su denominador. Observando ahora las dos últimas razones veremos que *r* es medio proporcional entre *x* y la suma de *x* con *r*, o sea que *r* es la porción áurea del segmento $r + x$, y de aquí este teorema :

Si a un segmento le sumamos su porción áurea se obtiene una suma, cuya porción áurea es el mismo segmento.

Procediendo a la inversa, o sea restando numeradores y denominadores, obtendremos

$$\frac{r-x}{x} = \frac{x}{r} = \frac{x-(r-x)}{r-x}$$

y al comparar la primera razón con la última, vemos que r — x es medio proporcional entre *x*, y la diferencia de *x* y de (r — x), o sea que r — x es precisamente la porción áurea de *x*, luego: *si a un segmento le restamos su porción áurea, la diferencia es, a su vez, la porción áurea del sustraendo*, o de otra manera: *al dividir un segmento en media y extrema razón, la parte menor resulta ser la porción áurea de la mayor.* Cosa que podíamos haber previsto, porque hay la misma razón entre la menor y la mayor, que entre la mayor y el segmento entero.

·3. *Construcción de la porción áurea de un segmento.* Para construir la porción áurea de un segmento *r* basta tener en cuenta la propiedad que acabamos de obtener: que *r* es medio proporcional entre su porción áurea *x* y la suma r + x, o sea

$$\frac{x}{r} = \frac{r}{r+x}$$

Y así, por ejemplo, fundándonos en la propiedad de que la semicuerda perpendicular a un diámetro es media proporcional entre los dos segmentos en que lo divide (92), comenzaremos por construir una primera circunferencia de radio *r* y trazar en ella dos diámetros perpendiculares (fig. 162); en el punto medio N de un radio, perteneciente a uno de esos diámetros haremos centro, y con un radio igual a la distancia NP, desde ese punto medio al extremo del otro diámetro, trazaremos una segunda circunferencia, o parte de ella, que cortará a la recta ON en un punto M, tal que OM es la porción áurea de *r*.

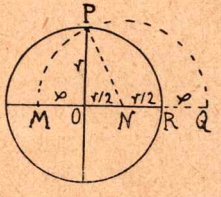


Fig. 162

Y en efecto, en la segunda circunferencia *r* resulta ser una semicuerda perpendicular al diámetro MQ, al cual lo divide en dos partes, tales que una es OM, y la otra OQ = OR + RQ = = OR + OM, por ser M y Q simétricos respecto de N, y el O y el R también, luego si llamamos *x* al OM será

$$\frac{OM}{OP} = \frac{OP}{OQ} \text{ ó } \frac{x}{r} = \frac{r}{r+x} \text{ ó } \frac{r-x}{x} = \frac{x}{r}$$

·4. *Cálculo de la porción áurea de un segmento.* La porción áurea, x, de un segmento r, se puede calcular resolviendo sencillamente la ecuación de segundo grado $\frac{r-x}{x} = \frac{x}{r}$ o sea $r \cdot (r - x) = x^2$.

Pero lo más breve es observar el triángulo ONP de la figura 162, que tiene un cateto igual a r, el otro igual a la mitad de r, y la hipotenusa, NP, que es igual a NM será $\frac{r}{2} + x$; luego el teorema de Pitágoras dará:

$$\left(\frac{r}{2} + x\right)^2 = r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 = r^2 + \frac{r^2}{4} = \frac{5r^2}{4}$$

$$\frac{r}{2} + x = \sqrt{\frac{5r^2}{4}} = r\,\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$x = \frac{r}{2} \cdot \sqrt{5} - \frac{r}{2} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1) = r \cdot \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

A este número $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ que expresa la razón entre la porción áurea de un segmento y el mismo segmento, y que vale un poco más de 0'6 se le llama a veces *número áureo*, y tiene la propiedad de que la diferencia entre el número 1 y él está con respecto al número áureo en la misma razón que este número y la unidad.

·5. *Relación entre el lado del decágono regular y el radio. El lado del decágono regular convexo es igual a la porción áurea de su radio.* En efecto, el triángulo isósceles formado por el lado HK = l_{10} del decágono regular y los radios que van a sus extremos tiene el ángulo en la base doble que el ángulo en el vértice, valiendo éste $\frac{2}{5}$ de recto. Pues entre los 10 ángulos centrales del decágono valdrán 4 rectos, o sea $\frac{20}{5}$ de recto, y uno solo valdrá $\frac{2}{5}$ de recto, teniendo que valer los ángulos en la base $\frac{8}{5}$ de recto entre los dos y por tanto $\frac{4}{5}$ de recto cada uno.

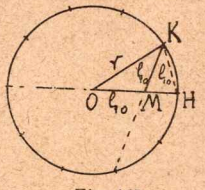


Fig. 163

Resulta de esto, que si trazamos la bisectriz MK de un ángulo en la base, formará otros dos triángulos isósceles, OMK, cuya base es OK, y MHK, cuya base es MH. Y como la bisectriz divide al lado opuesto en dos partes proporcionales a los otros dos lados (90), se tendrá $\frac{MH}{OM} = \frac{HK}{OK}$ ó $\frac{r - l_{10}}{l_{10}} = \frac{l_{10}}{r}$ lo que prueba que l_{10} es igual a la porción áurea de *r*. Cosa que también se ve directamente escribiendo la proporcionalidad de lados en los triángulos semejantes $\overset{K}{M}\overset{}{H} \sim \overset{O}{H}\overset{}{K}$.

Dedúcese de aquí, que el valor de l_{10} en función de *r* es:

$$l_{10} = r \cdot \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

Puede observarse que la bisectriz KM, prolongada hasta que encuentre a la circunferencia otra vez, nos da el lado del decágono regular estrellado de tercera especie (**75** ·5); es decir, cuyo lado comprende un arco de tres divisiones.

·6. *Relación entre el lado del pentágono regular, el del decágono y el radio.* Si la circunferencia la dividimos en 10 partes iguales, y trazamos una cuerda que comprenda dos divisiones, esa cuerda será el lado del pentágono regular convexo.

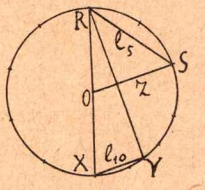


Fig. 164

Forma con los radios que van a sus extremos un triángulo isósceles, en el cual podemos aplicar el teorema que da el cuadrado del lado de un triángulo (**89** ·1), al lado $RS = l_5$, (fig. 164), opuesto a un ángulo agudo. Para ello observaremos que la proyección del lado OR sobre OS es precisamente igual a la mitad del lado del decágono regular, pues la cuerda RY que comprende cuatro divisiones, y la XY que comprende una, serán perpendiculares, por formar un ángulo inscrito en una semicircunferencia; mientras que la recta OS y la XY son paralelas, por formar ángulos correspondientes iguales con el diámetro RX, el uno central de dos divisiones, y el otro inscrito de cuatro divisiones. Resultando OZ mitad de XY, tendremos:

$$l_5^2 = RS^2 = OR^2 + OS^2 - 2 \cdot OS \cdot OZ = r^2 + r^2 - r \cdot l_{10} =$$

$$= r^2 + l_{10}^2 \quad \text{pues} \quad l_{10}^2 = r \cdot (r - l_{10})$$

Poniendo ahora l_{10} en función del radio, para hallar l_5 tendremos :

$$l_5^2 = r^2 + l_{10}^2 = r^2 + \frac{r^2}{4}(\sqrt{5} - 1)^2 = r^2 + \frac{r^2}{4}(5 - 2 \cdot \sqrt{5} + 1)$$

$$= \frac{r^2}{4}(10 - 2 \cdot \sqrt{5}) \quad \text{y} \quad l_5 = \frac{r}{2} \cdot (\sqrt{10 - 2\sqrt{5}})$$

·7. *Construcción del pentágono y decágono regular.* La construcción del pentágono y decágono regular dado el radio, y por consiguiente, la división de la circunferencia en 5 o en 10 partes iguales, es una consecuencia de la construcción de la porción áurea de un segmento. Y así, dada una circunferencia de radio *r*, comencemos por trazar dos diámetros perpendiculares, y haciendo centro en el punto medio N, de un radio perteneciente a uno de esos diámetros, tracemos una circunferencia nueva, o mejor un pequeño arco de ella, que corte al diámetro ON en un punto M, siendo el radio de ese arco la distancia NP. Resulta entonces que OM es el lado del decágono regular convexo de radio *r*, pues hemos demostrado que es OM la porción áurea de *r* (·3); y MP es el lado del pentágono regular convexo de radio *r*, pues la ecuación obtenida en el párrafo anterior $l_5^2 = r^2 + l_{10}^2$ demuestra que :

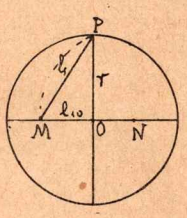


Fig. 165

Un triángulo rectángulo que tenga un cateto igual al lado del decágono regular, y el otro cateto igual al radio del mismo, tendrá la hipotenusa igual al lado del pentágono regular de igual radio.

104. Otros polígonos regulares

·1. Construído un polígono regular de n lados, para construir el de $2n$ lados bastará dividir cada arco del primero en dos partes iguales, trazando la bisectriz del ángulo en el centro correspondiente.

Y para calcular el lado l_{2n} de dicho polígono regular de $2n$ lados y radio r, en función del lado l_n del polígono de n lados, y el mismo radio, basta observar que el lado l_{2n} forma una cuerda AC, cuya proyección sobre el diámetro que pasa por uno de sus extremos es el segmento CP, diferencia entre el radio r y la apotema del polígono de n lados; luego, aplicando el teorema de que esa cuerda es media proporcional entre el diámetro y su proyección sobre él (92), resultará (100 ·3):

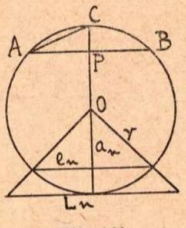


Fig. 166

$$l_{2n}^2 = 2r \cdot \left(r - \frac{1}{2} \sqrt{4 l_n^2 - r^2} \right)$$

Sabemos por tanto construir con la regla y el compás polígonos regulares de 3, 4, 5, 6, 8, 10... lados y los que se obtienen multiplicando los anteriores por una potencia cualquiera de 2; y calcular sus lados en función del radio.

·2. También se sabe para otros polígonos, como por ejemplo para el *pentadecágono*, o polígono regular de 15 lados; pues al ser $\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$ el arco de ese polígono será la diferencia entre el arco correspondiente al lado del exágono y el del decágono.

Pero la división de la circunferencia en n partes, cualquiera que sea n, o sea la construcción del n-gono regular, no siempre es posible con el solo auxilio de la regla y el compás.

105. Polígono circunscrito de n lados

Entre el lado del polígono circunscrito de n lados y el del inscrito semejante a él existe la relación $\frac{L_n}{r} = \frac{l_n}{a_n}$ (fig. 166).

Ejercicios

Calcular por la fórmula del párrafo (**104** · 1) el lado del pentágono en función del decágono. Calcular el lado del exágono regular circunscrito en función del radio; y la altura del triángulo equilátero en función del lado. Constrúyase un pentadecágono.

LECCIÓN 19

LONGITUDES DE CURVAS

106. Longitud de una circunferencia y de un arco

Al tratar de las propiedades métricas de los arcos de circunferencia dijimos que para comparar arcos y circunferencias de cualquier radio se hacía corresponder a cada arco una amplitud determinada, que es la de su ángulo central correspondiente, y una longitud determinada, que es de la que vamos a tratar.

Desde el punto de vista experimental, la longitud de una circunferencia o de un arco es la de un hilo que se arrolla sobre esa figura, como por ejemplo, sobre la llanta de una rueda de igual radio, y que después se rectifica. O la longitud recorrida por el centro de una rueda que gira sobre una recta, al dar una vuelta.

Pero este concepto carece de precisión matemática.

·1. *Longitud de la circunferencia.* Consideremos un polígono inscrito en una circunferencia, el cual sea regular y de n lados; a su perímetro le llamaremos p_n, y al del polígono regular circunscrito de n lados, P_n. Fijada la circunferencia y fijado el número n, las dos cantidades p_n y P_n son dos longitudes constantes.

Pero si la letra n suponemos que representa una *variable*, cuyos valores son los de la sucesión indefinida: 3, 4, 5, 6..., las expresiones p_n y P_n representarán longitudes variables, siendo los valores de p_n los perímetros de los infinitos polígonos regulares, que se pueden inscribir en la circunferencia dada, y P_n los perímetros de los circunscritos.

Esas dos variables son tales que cualquier valor de la primera, p_h, *es menor que cualquiera de la segunda,* P_k (74 · 3).

Por otra parte, *la diferencia* $P_n - p_n$ *es un infinitésimo;* o sea, acaba por ser, desde un valor de *n* en adelante, menor que cualquier longitud que se nos dé, como enseguida vamos a probar.

Y se demuestra en Aritmética que dos variables que cumplan esas dos condiciones tienen un límite, el mismo para las dos, al cual se llama longitud de la circunferencia dada. Es decir:

Longitud de una circunferencia es el límite de los perímetros de los polígonos regulares inscritos, o de los circunscritos, cuyo número de lados aumenta indefinidamente.

Si a esa longitud de la circunferencia la llamamos C, será:

$$C = \lim. \; p_n = \lim. \; P_n$$

comprobándose fácilmente que es mayor que cualquier polígono inscrito y menor que cualquiera circunscrito.

Demostremos que la diferencia $P_n - p_n$ puede acabar por ser menor que cualquier longitud, E, que se nos dé. Se suponen para ello construídos los polígonos circunscritos, de tal modo que sus lados tienen por puntos de contacto los vértices del inscrito de igual número de lados; (figura 167). Se forman así triángulos isósceles, tales como el ABC, formado por un lado del inscrito y dos semilados del circunscrito. Como un lado de un triángulo es mayor que la diferencia de los otros dos, será la altura $CH > AC - AH$, y multiplicando los dos miembros de esta desigualdad por el duplo del número de lados *n*, será: $2n \cdot CH > P_n - p_n$.

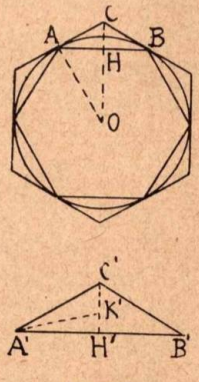


Fig. 167

Si logramos ahora demostrar que el primer miembro acaba por ser menor que E, desde un cierto valor de *n* en adelante, quedará demostrado que lo mismo le ocurre al segundo miembro.

Para ello construyamos otro triángulo isósceles A'B'C' (que en la figura está muy reducido); el cual sea semejante al ABC, y cuyos ángulos en la base serán, por tanto, iguales al $\hat{BAC} = \frac{180^\circ}{n} = \hat{HOA}$.

Pero la base A'B' la construiremos de manera que sea mayor que el perímetro de cualquier polígono inscrito. Basta para ello hacer A'B', igual, por ejemplo, a cuatro diámetros, que es el perímetro del cuadrado circunscrito. Observaremos entonces que las alturas y las bases de ambos triángulos son proporcionales, luego: $\frac{C'H'}{CH} = \frac{A'B'}{AB}$, y al ser A'B' mayor que el perímetro del inscrito, o sea mayor que n veces AB, también será: $C'H' > n \cdot CH$ y $2 \cdot C'H' > 2n \cdot CH$; o en fin: $2 \cdot C'H' > P_n - p_n$.

Pero fácilmente se ve que el primer miembro acaba por ser menor que E. Basta para ello construir sobre la altura H'C' un segmento $H'K' = \frac{E}{2}$, y uniendo K' con A' se formará un ángulo B'A'K' el cual viene a ser, desde un cierto valor de n, mayor que el ángulo $B'A'C' = \frac{180^\circ}{n}$; y desde ese valor de n será: $C'H' < \frac{E}{2}$ y será $2 \cdot C'H' < E$ y $P_n - p_n < E$.

·2. *Longitud de un arco.*—Las mismas consideraciones que nos han conducido a definir la longitud de una circunferencia, pueden conducirnos a definir la longitud de un arco de ella.

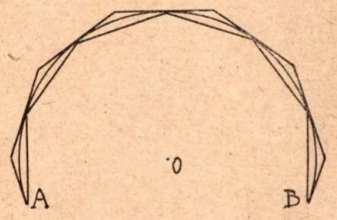


Fig. 168

Dividiendo el arco en n partes iguales, podremos trazar una poligonal o quebrada inscrita que tenga sus vértices en los puntos de división, y sus extremos en los del arco (fig. 168). Esa poligonal inscrita tendrá n lados iguales entre sí, por ser cuerdas que corresponden a arcos iguales (67).

Trazando tangentes por los puntos de división, y por los extremos del arco, se formará una poligonal circunscrista, cuyos lados intermedios son todos iguales entre sí (74); y los lados extremos son iguales a la mitad de un lado intermedio; de manera que el perímetro es igual al de una poligonal de n lados iguales.

Si llamamos p_n al perímetro de la inscrita, y P_n al de la circunscrita, al variar n, esos perímetros variarán, pero de tal manera que cualquier perímetro de una inscrita, tal como p_h, es menor que cualquiera de una circunscrita, P_k (74 ·4), y la diferencia $P_n - p_n$ es un infinitésimo, o sea acaba por ser menor que

cualquier longitud que se dé (**106** ·1). Existirá, pues, una longitud determinada definida por las igualdades

$$A = \lim. p_n = \lim. P_n$$

que se llama *longitud del arco*, la cual es, por tanto, *el límite de esas poligonales inscritas o circunscritas, cuyo número de lados aumenta indefinidamente.*

107. Relación entre una circunferencia y su diámetro

Antes de estudiar esta importante cuestión, veamos algunos lemas.

·1. *Semejanza entre circunferencias. Dos circunferencias cualesquiera son semejantes.* En efecto, dadas dos circunferencias C y C' construyamos una tercera circunferencia C_1, concéntrica con la C e igual a la C'. Esa tercera circunferencia C_1 es semejante a la C, porque a cada punto de la C, tal como el A, se puede hacer corresponder otro A_1 (fig. 169) que esté en el semirrayo OA; y es claro que la razón entre un segmento que una dos puntos cualesquiera A y B de la C, y el que une sus homólogos A_1 y B_1 es constante para cualquier par de puntos, porque se tiene

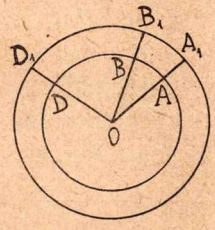


Fig. 169

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{OA}{OA_1} = \frac{BD}{B_1D_1} = \ldots \quad (95).$$

La razón de semejanza es la razón entre los radios o entre los diámetros, porque los triángulos O^{B}_{A} y $O^{B_1}_{A_1}$ son semejantes, ya que tienen iguales los ángulos en O, y proporcionales los lados que los forman.

·2. *Relación entre los perímetros de dos polígonos semejantes. La relación entre los perímetros de dos polígonos semejantes es igual a la relación de semejanza.* Pues si los lados del uno son AB, BC .., y los del otro A'B', B'C'..., aplicando a la serie de razones iguales que expresa su proporcio-

nalidad la propiedad de la suma de numeradores y denominadores será (99):

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \ldots = \frac{AB + BC + CD + \ldots}{A'B' + B'C' + C'D' + \ldots}$$

·3. *Proporcionalidad entre las longitudes de las circunferencias y sus diámetros. La razón entre la longitud de una circunferencia y la de su diámetro es un número constante, que se suele designar con la letra griega* π *(pi).* O de otro modo, las circunferencias son proporcionales a sus diámetros.

En efecto, supongamos dos circunferencias, cuyas longitudes las llamaremos C y C', y a los perímetros de sus polígonos regulares de n lados inscritos p_n, y p'_n.

Por definición de longitud de una circunferencia se tendrá (106), $C = \lim. p_n$ $C' = \lim. p'_n$.

Pero los polígonos de perímetros p_n y p'_n son semejantes, siendo la razón de semejanza igual a la relación entre los diámetros, lo cual se puede ver con toda evidencia colocando las circunferencias de modo que tengan el mismo centro, luego llamando D y D' a los diámetros respectivos será (fig. 170) $\frac{p_n}{D} = \frac{p'_n}{D'}$ y tomando límites $\lim. \frac{p_n}{D} = \lim. \frac{p'_n}{D'}$.

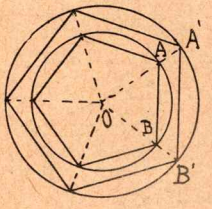


Fig. 106

Dividiendo ahora las igualdades que definen C y C' por los respectivos diámetros, y aplicando las propiedades de los límites (106):

$$\frac{C}{D} = \frac{\lim. p_n}{D} = \lim. \frac{p_n}{D} \quad » \quad \frac{C'}{D'} = \frac{\lim. p'_n}{D'} = \lim. \frac{p'_n}{D}$$

luego será, finalmente, $\frac{C}{D} = \frac{C'}{D'}$.

Si tenemos más de dos circunferencias: C_1, C_2, C_3 ... será

$$\frac{C_1}{D_1} = \frac{C_2}{D_2} = \frac{C_3}{D_3} = \ldots = \pi$$

·4. *Idea sobre el cálculo de* π. Para calcular π consideraremos una circunferencia cualquiera, cuyo diámetro se toma por

unidad de longitud, y en tal caso la longitud de esa circunferencia tiene por medida el número π (20).

Y para calcular la longitud de esa circunferencia empezaremos por un polígono inscrito, por ejemplo, de 6 lados, cuyo perímetro es igual a 6 radios, o sea a 3 diámetros, lo que nos dice que el número π es mayor que 3. Si consideramos el cuadrado circunscrito, cuyo perímetro es igual a cuatro diámetros, veremos que el número π es menor que 4. Puede hallarse luego el perímetro del polígono inscrito de 12 lados por una fórmula estudiada anteriormente (104 1), y después el de 24, y el de 48, y así sucesivamente, hasta un número de lados suficiente para las cifras decimales que se quieran calcular, las cuales podrán asegurarse calculando el perímetro del circunscrito de igual número de lados (105), y entre los números que miden esos dos perímetros estará π.

Este procedimiento es muy lento, y se han ideado otros métodos geométros más rápidos, pero ninguno aventaja al método del desarrollo en *serie* que se estudia en Análisis Matemático.

Como ya se ha calculado π de una vez para todas, hasta con 500 y más cifras decimales, no hace falta repetir el cálculo.

Las primeras cifras son $\pi = 3'14159265...$

Se ha demostrado que es un número *inconmensurable*, por lo cual no podrá ser expresado ni por un decimal de número finito de cifras, ni por un decimal periódico.

·5. *Rectificación gráfica de la circunferencia.* El problema de construir un segmento cuya longitud sea igual a la de una circunferencia dada, no es resoluble exactamente con la regla y el compás. Pero se puede resolver con cuanta aproximación se quiera multiplicando el diámetro por el número 3'14 ó por el más aproximado 3'1416, etc.

Dos valores aproximados de π son $3\frac{1}{7}$ y $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Esto nos dice que tomando tres diámetros y $\frac{1}{7}$ de diámetro se tendrá un segmento muy aproximadamente igual a la circunferencia rectificada. Y sumando el lado del cuadrado ins-

crito con el del triángulo equilátero inscrito se obtendrá un segmento muy aproximadamente igual a la longitud de la semicircunferencia, pues se tiene (101 y 102) :

$$l_4 + l_3 = r \cdot \sqrt{2} + r \cdot \sqrt{3} = r \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3})$$

·6. *Cálculo de la circunferencia o del radio.* Para calcular la circunferencia en función del radio, o de éste en función de aquélla, bastará aplicar las fórmulas :

$$C = \pi \times D = \pi \cdot 2r = 2\pi r$$

$$r = \frac{C}{2\pi} = \frac{C:2}{\pi}$$

108. Relación entre la longitud de un arco, su amplitud y su radio

·1. Recordemos que llamábamos amplitud de un arco a la amplitud de su ángulo central correspondiente (**65** ·4). Probemos ahora que :

a) *Entre arcos de la misma amplitud las longitudes son proporcionales a sus respectivos radios;*

b) *y entre arcos del mismo radio, las longitudes son proporcionales a las respectivas amplitudes.*

Para demostrar el a) observaremos, ante todo, que dos arcos que tengan la misma amplitud son semejantes; lo que se ve, sin más que construir un arco concéntrico con uno de ellos y que sea igual al otro, teniendo los radios que van a los extremos en las mismas semirrectas (fig. 171), y razonando lo mismo que para las circunferencias (**107** ·1). Llamando *a* a la longitud del arco MN y p_n a la poligonal inscrita en él de *n* lados iguales será (**196** ·2) :

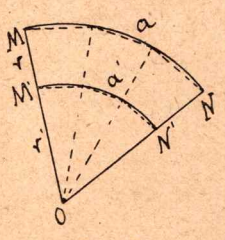


Fig. 171

$$a = \lim. p_n, \quad \text{y para el otro arco} \quad a' = \lim. p'_n$$

Pero las dos poligonales son semejantes, como puede verse

en la figura, luego será $\frac{p_n}{r} = \frac{p'_n}{r'}$, de donde: lim. $\frac{p_n}{r}$ = lim. $\frac{p'_n}{r'}$ y finalmente : $\frac{a}{r} = \frac{\text{lim. } p_n}{r} = \text{lim. } \frac{p_n}{r}$. Asímismo : $\frac{a'}{r'} = \frac{\text{lim. } p'_n}{r'} = \text{lim. } \frac{p'_n}{r'}$ luego : $\frac{a}{r} = \frac{a'}{r'}$.

Para demostrar el b) consideramos AB y MN del mismo radio (fig. 172); llamemos a sus longitudes *a*, *b*, y a sus amplitudes α y β, tenemos que demostrar que es $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{a}{b}$.

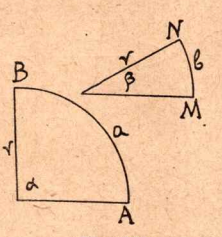


Fig. 172

El número que expresa la razón $\frac{\alpha}{\beta}$ puede ser entero, fraccionario o irracional.

Si es entero, por ejemplo, $\frac{\alpha}{\beta} = 3$, ó $\alpha = 3\,\beta$, podremos dividir el ángulo o arco de amplitud α en 3 partes iguales al de amplitud β. Pero es evidente que si dos arcos tienen el mismo radio y la misma amplitud, tendrán la misma longitud, pues los polígonos inscritos de *n* lados iguales, son iguales en ambos (67).

Y esto demuestra que el arco de longitud *a* habrá quedado dividido en tres partes iguales al de longitud *b*, y por tanto que es $a = 3\,b$, y $\frac{a}{b} = 3$ y por fin $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{a}{b}$

Si $\frac{\alpha}{\beta}$ es un número fraccionario, por ejemplo $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{4}{3}$ o sea $\alpha = 4\,\frac{\beta}{3}$ podremos dividir el β en 3 partes iguales y el α en 4, resultando que las partes del β son iguales a las del α. Lo mismo les habrá ocurrido a los arcos, luego será

$$a = 4 \cdot \frac{b}{3} \quad \text{y} \quad \frac{a}{b} = \frac{4}{3} = \frac{\alpha}{\beta}$$

Y si $\frac{\alpha}{\beta}$ es un número irracional, llamando $\frac{m}{n}$ y $\frac{m+1}{n}$ a sus valores aproximados por defecto y por exceso en menos de $\frac{1}{n}$ se tendrá

$$\frac{\alpha}{\beta} = \text{lim. } \frac{m}{n} \quad » \quad \frac{m}{n} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{m+1}{n} \quad » \quad \frac{m}{n}\beta < \alpha < \frac{m+1}{n}\beta.$$

Y por tanto, tomando a partir de un lado del ángulo α dos ángulos iguales a $\frac{m}{n}\beta$, el uno, y a $\frac{m+1}{n}\beta$, el otro, quedará el α comprendido entre los dos; lo cual nos dice que el arco *a* quedará comprendido entre dos arcos que son iguales a $\left(\frac{m}{n}\right)$ b el uno y a $\left(\frac{m+1}{n}\right)$ b el otro, resultando ser

$$\frac{m}{n}\,b < a < \frac{m+1}{n}\,b \quad y \quad \frac{m}{n} < \frac{a}{b} < \frac{m+1}{n}$$

y por fin $\frac{a}{b} = \lim. \frac{m}{n} = \frac{\alpha}{\beta}$

·2. *Relación entre la longitud, la amplitud y el radio de un arco.* Resulta de esto que la longitud *l* de los arcos de circunferencia, es una magnitud variable que depende de otras dos, la amplitud x y el radio r, siendo proporcional a cada una de estas cuando solo ella varía, conservándose constante la otra. Pero se demuestra en Aritmética que si una magnitud depende de otras varias, siendo proporcional a cada una cuando solo ella varía, será proporcional a su producto; y en nuestro caso, llamando *k* a la constante de proporcionalidad se tendrá

$$l = k \,.\, x \,.\, r$$

La constante *k* no dependerá mas que de las unidades de medida, pues dada la amplitud y el radio de un arco, queda determinada la longitud del mismo. Si medimos la amplitud en grados sexagesimales, aplicando la fórmula anterior a la circunferencia, o mejor a su mitad, que tiene 180° y una longitud igual a πr, será:

$$\pi r = k \,.\, 180^\circ \,.\, r \quad \text{de donde } k = \frac{\pi r}{180^\circ \,.\, r} = \frac{\pi}{180^\circ}$$

luego la longitud *l*, de un arco de *n* grados y radio *r* será:

$$l = \frac{\pi}{180^\circ} \times n^\circ \times r$$

Fórmula a la cual también se llega por una regla de tres que diga:

Si los grados son 180, la longitud es πr
— *n* — será x $\left\{ x = \frac{\pi r n}{180} = \frac{\pi}{180} \cdot n \cdot r \right.$

·3. *Unidad natural para medir las amplitudes.* En la fórmula $l = k \cdot x \cdot r$ la unidad natural para medir la amplitud x es aquella que hace que la constante de proporcionalidad *k* tome el valor uno. Llamando a esa unidad natural de amplitudes *radiante*, cuando x valga un radiante poniendo en vez de x el valor 1, y en vez de *k* el valor 1, la longitud *l* será entonces igual al radio, luego :

Se llama radiante a la amplitud de un arco cuya longitud es igual al radio.

Si recordamos que la cuerda del arco de 60° es igual que el radio, se verá que el radiante vale algo menos de 60°. Para calcular exactamente los grados que tiene un radiante, podremos resolver otra regla de tres :

Si la longitud de un arco es πr tiene 180°
— — es r tendrá z°

luego $z^\circ = \frac{180^\circ \times r}{\pi r} = \frac{180^\circ}{\pi} = 57^\circ\ 17'\ 44'',8$

A lo cual también se llega aplicando la fórmula $l = \frac{\pi}{180} \times n \times r$ al arco de longitud *r*, o sea al radiante: $r = \frac{\pi}{180^\circ} \times 1$ radiante $\times$ r, luego : 1 radiante $= \frac{180^\circ}{\pi}$.

Resulta pues, que si medimos x en radiantes, se tiene la fórmula:

$$l = x \cdot r \quad \text{o} \quad \frac{l}{r} = x$$

Ella nos dice, que las amplitudes de arcos o ángulos son magnitudes que se identifican en cierto modo con los números abstractos, pues son razones entre dos longitudes, la *l* y la *r*. De aquí el carácter absoluto de las amplitudes (**30** ·2).

109. Relación entre las longitudes de dos líneas semejantes

El estudio de la teoría de longitudes de líneas no lo desarrollaremos por completo, pues se sale en cierto modo de los límí-

tes de una Geometría elemental. Pero sí indicaremos un concepto de línea de los que hoy son admitidos como rigurosos.

·1. *Figura perfecta.* Supongamos una figura F formada por puntos A, B, C...; consideremos un punto P, perteneciente, o no, a la figura F. Entre todas las distancias PA, PB, PC... , desde el punto P, a los puntos de F, que son distintos de P, puede haber una que sea mínima; y en ese caso, a esa distancia mínima se llama distancia de P a la figura F. Por ejemplo, si F está formada por los puntos todos del segmento AB, y P está en prolongación de AB por el lado B, la distancia de P al segmento AB es la longitud de PB (figura 137).

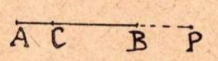


Fig. 173

Pero puede suceder que entre esas distancias PA, PB, PC..., no haya ninguna que sea mínima; y entonces se demuestra, fundándose en la continuidad de las longitudes (16), que existe una longitud determinada (que puede ser nula), menor que todas esas distancias, PA, PB, PC..., y tal que al sumarle cualquiera longitud, ya la suma excede a alguna de esas distancias. A tal longitud determinada, se le llama entonces distancia del punto P a la figura F. Por ejemplo, si la figura F está formada solamente por los puntos *interiores* al segmento AB (fig. 173), entre las distancias de P a los puntos de F, no hay ninguna que sea mínima, pero existe una longitud determinada, que es la de PB, menor que todas esas distancias, y tal que al sumarle una longitud cualquiera, la suma excede ya a alguna de ellas. La longitud PB es también la distancia de P a los puntos interiores al segmento AB.

Dada una figura F, se llama figura *derivada* de la F, a otra figura F' formada por los puntos que están a distancia nula de la figura F. Por ejemplo, si la F está formada por los puntos interiores al segmento AB, la F' está formada por todos los puntos del segmento AB, es decir, por los puntos de F, más los A y B.

Se llama figura perfecta aquella que coincide con su derivada, y figura formada por *puntos aislados* la que no tiene ningún punto común con su derivada. El segmento AB, completo,

es una figura perfecta; los puntos A y B solamente, forman una figura de puntos aislados; y los puntos interiores al segmento AB forman una figura que ni es perfecta, ni está formada por puntos aislados.

·2. *El concepto de línea plana. Línea plana es una figura plana, perfecta, tal que por cada uno de sus puntos pasa al menos una recta del plano, que no tiene común con ella más que puntos aislados.* Si no hay ningún segmento rectilíneo que forme parte de la línea, ésta se llama *curva.*

A decir verdad, la Matemática no posee todavía un concepto único, por todos admitido, correspondiente a la palabra línea. Se tiene, sin embargo, un concepto intuitivo, más o menos preciso, y a él vamos a referirnos ahora al hablar de línea.

·3. *Longitud de una línea.* Supongamos una línea formada por un trazo sin interrupciones, que no se corta a sí misma, y que es cerrada, o que tiene dos extremos A y B. Inscríbase una poligonal de *n* lados, o sea una poligonal que tiene sus vértices en la línea, de tal modo, que si ésta es cerrada, lo sea la poligonal, y si es abierta, con los extremos A y B, lo sea la poligonal, y tenga los mismos extremos (43). Al perímetro de esa poligonal le podemos llamar p_n. Hagamos crecer *n* indefinidamente, es decir, inscribamos poligonales sucesivas de manera que el número de lados aumente indefinidamente, y de tal modo que el lado máximo de las poligonales sucesivas tienda a cero. Entonces p_n es una longitud variable, y cuando tiende a un límite fijo C, el mismo cualquiera que sea la ley tendencia a ese límite, a éste se le llama longitud de la línea, que será por definición : longitud de la línea $= C = \lim. p_n$.

Tal hemos visto que ocurre con las circunferencias o sus arcos, cuando se inscriben polígonos regulares (106).

·4. *Relación entre longitudes de líneas semejantes.* Hemos visto que la relación o razón entre los perímetros de dos polígonos semejantes es igual a la razón de semejanza (**107** ·2); y que la relación entre las longitudes de dos circunferencias es igual a la razón de semejanza (**107** ·3). Esto es general :

la razón entre las longitudes de dos líneas semejantes es igual a la razón de semejanza. $\frac{C}{C'} = r$.

En efecto, dadas dos líneas semejantes, cuyas longitudes llamamos C y C', inscribamos en la primera una poligonal de *n* lados, cuyo perímetro llamaremos p_n, e inscribamos en la segunda otra poligonal de *n* lados, semejante a la inscrita en la primera, lo cual se puede hacer, por ejemplo, colocando las líneas en posición homotética, y hallando la homotética de la primera poligonal, cuya razón de semejanza u homotecia sea la de las líneas. Llamando entences p'_n a la poligonal inscrita en la segunda línea, y *r* a la razón de semejanza dicha, será $\frac{p_n}{p'_n} = r$.

Si ahora se hace crecer *n* indefinidamente, se tendrá :

$$C = \text{lím. } p_n \text{ » } C' = \text{lím. } p'_n \text{ » } \frac{C}{C'} = \frac{\text{lím. } p_n}{\text{lím. } p'_n} = \text{lím. } \frac{p_n}{p'_n} = \text{lím. } r = r.$$

$$\text{luego } \frac{C}{C'} = r .$$

·5 *Pantógrafo.* Para construir una línea semejante a otra hay un aparato llamado pantógrafo (fig. 174). Se compone esencialmente, de un paralelogramo articulado, es decir, de un paralelogramo construído con varillas metálicas que se articulan en los vértices de modo que pueden girar alrededor de ellos. Se prolongan dos lados adyacentes, MN y MP y se toman tres puntos A, B y C en línea recta que estén el uno en un lado no prolongado, y los otros dos, uno en cada prolongación dicha. Si se fija el punto A en el plano, y se mueve de cualquier manera el aparato de modo que dicho punto no se mueva, los otros dos B y C se conservan siempre en línea recta con el A y describen líneas semejantes, en posición homotética, como vamos a ver; así que, colocando en uno de los dos, B ó C, un punzón o lapicero que vaya recorriendo una línea dada, otro lapicero colocado en el otro punto, irá dibujando otra línea semejante a la

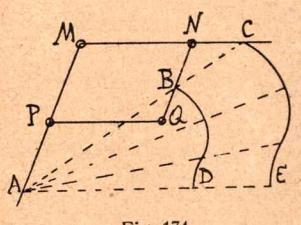


Fig. 174

dada, pudiéndose además elegir la razón de semejanza, sin más que variar la posición de los puntos B y C respecto del N antes de comenzar el trazado.

El fundamento del aparato es muy sencillo. El paralelogramo articulado se conservará paralelogramo en cualquier posición que se coloquen sus vértices, pues aunque varíen los ángulos, siempre será un cuadrilátero que los dos pares de lados opuestos iguales (**55** 5). Por otra parte, colocados previamente A, B y C de modo que estén en línea recta, se formarán estos dos triángulos semejantes $\overset{C}{A}M \sim \overset{C}{B}N$ que lo son por tener, respectivamente, iguales los ángulos en M y en N, y son sus lados proporcionales según esta proporción

$$\frac{CM}{CN} = \frac{CA}{CB} = \frac{MA}{NB}$$

Al moverse el aparato de manera que A quede fijo, la recta que une A con C cortará a las paralelas AM y BN de modo que forma otros dos triángulos semejantes, siendo también la razón de semejanza $\frac{CM}{CN}$, lo que prueba que esa recta AC corta a NQ en el punto B. Como además es $\frac{AB}{AC} = \frac{MN}{MC} = \frac{AD}{AE} = \ldots$ las líneas son homotéticas con centro en A y razón $\frac{MN}{MC}$, y por tanto, semejantes (98).

Ejercicios

Rectifíquense una circunferencia y un arco de 70° de radio 5 cm.

Hállese, aproximadamente, el radio terrestre según definición la de metro.

LECCIÓN 20

FIGURAS ARMÓNICAS

110. Puntos conjugados armónicos

·1. *Problema. Dados dos puntos* A *y* B *y una razón* $\frac{p}{q}$ *entre dos segmentos o dos números, hallar en la recta* AB *los puntos* P *que cumplan esta condición* $\frac{PA}{PB} = \frac{p}{q}$.

Para resolver el problema trácese por el punto A una recta cualquiera, en la cual se toma un segmento AC, y por B una paralela (fig. 175) a la AC, y en ella se toma a uno y otro lado de B dos segmentos iguales BD y BD' tales que AC y BD sean, respectivamente, iguales a p y q, o bien proporcionales a p y q. Entonces, salvo el caso en que p y q sean iguales, las rectas CD y CD' cortarán a la AB en dos puntos M y N que son los que cumplen las condiciones del problema.

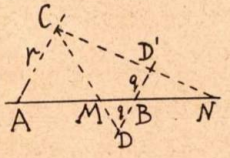


Fig. 175

Y en efecto, se tienen los triángulos semejantes siguientes (82 ·6)

$\overset{C}{A}M \sim \overset{D}{B}M$ que dan $\frac{MA}{MB} = \frac{p}{q}$, y los $\overset{C}{A}N \sim \overset{D'}{B}N$ que dan $\frac{NA}{NB} = \frac{p}{q}$

Por otra parte, no hay más puntos en la recta que cumplan las condiciones del problema, pues cualquier otro punto P', tomado en la recta AB, distinto de los M y N, al unirlo con C nos da una recta de unión que corta a la BD en un punto D" distinto de los D y D' y la razón $\frac{BD''}{AC}$, y por tanto, la $\frac{P'B}{P'A}$ será desigual a la $\frac{p}{q}$, es decir, la razón $\frac{P'A}{P'B} \neq \frac{p}{q}$.

Si en los segmentos MA, MB, NA, NB se considera además de la longitud absoluta, el *sentido*, es decir, se consideran

como vectores (4), los dos primeros son de sentido contrario, porque estando C y D en distinto semiplano respecto de la recta AB, el punto M tiene que ser interior al segmento AB, y la razón $\frac{MA}{MB}$ la debemos considerar como negativa; en cambio, NA y NB, son del mismo sentido, y la razón $\frac{NA}{NB}$ la debemos considerar como positiva. Resulta, pues, que esas dos razones son iguales en valor absoluto, pero de signo contrario, es decir:

$$\frac{NA}{NB} = -\frac{MA}{MB}$$

A los puntos M y N que cumplen esta condición se les llama conjugados armónicos, respecto de A y B, con arreglo a esta definición:

·2. *Dos puntos*, M *y* N, *de una recta se dicen conjugados armónicos respecto de otros dos* A *y* B *de la misma recta, cuando las razones de las distancias de cada uno de aquéllos a los otros dos son iguales en valor absoluto, aunque de signos contrarios.*

Veamos algunos ejemplos de puntos conjugados armónicos.

·3. *Las bisectrices de un ángulo de un triángulo. Los pies de las bisectrices interior y exterior de un ángulo de un triángulo son conjugados armónicos respecto de las vértices del triángulo, que se encuentran en el lado opuesto a aquel ángulo* (fig. 176).

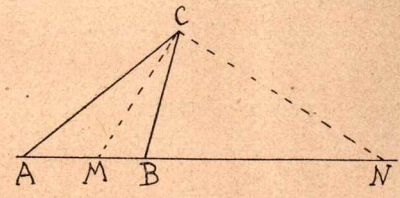


Fig. 176

En efecto, sabemos que se verifican en la figura, las relaciones (90):

$$\frac{MA}{MB} = \frac{CA}{CB} \quad \frac{NA}{NB} = \frac{CA}{CB}$$

y teniendo en cuenta también el signo nos dan $\frac{MA}{MB} = -\frac{NA}{NB}$

·4. *Centros de semejanza de dos circunferencias.* Dadas dos circunferencias de centros O y O' de un plano, tracemos en una de ellas un radio OA, y en la otra los dos radios O'M y O'N paralelos al OA. Uniendo los extremos de los radios,

las rectas de unión cortan, en general, a las rectas de los centros en dos puntos P y Q que serán conjugados armónicos respecto de los O y O', pues es la misma la construcción que en el problema (·1). Además, la razón $\frac{PO}{PO'}$ o la $\frac{QO}{QO'}$ es igual en valor absoluto a la razón entre los radios; lo que nos dice que cualquiera que sean los radios paralelos que tracemos, las rectas que unen sus extremos pasarán siempre por P o por Q, los cuales son por consiguiente centros de homotecia directa e inversa respectivamente de las dos circunferencias (98).

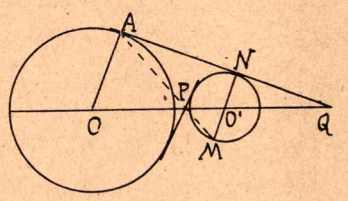


Fig. 177

Dos circunferencias de un plano tienen pues en general dos centros de homotecia o centros de semejanza, que son conjugados armónicos respecto de los centros de las circunferencias.

·5. *Conjugado armónico del punto medio de un segmento.* La construcción del punto conjugado armónico de un punto dado M respecto de los A y B (fig. 175) es inmediata después de haber resuelto el problema (·1). Bastará trazar por A y B dos rectas paralelas; por M una recta que las corte, en dos puntos C y D; tomar luego un segmento BD' = BD; y trazar la recta CD', que cortará a la AB en el punto N, conjugado armónico del M respecto de los A y B.

Pero si el punto M fuese precisamente el punto medio de AB, como ocurre en la figura 178, al hacer la construcción, la recta CD' resulta paralela a la AB, y no hay ningún punto propiamente tal que sea conjugado armónico del M. Esto lo podíamos haber previsto, toda vez que cualquier punto de la recta, que sea distinto del punto medio de AB, tiene que estar más cerca de A que de B o más cerca de B que de A, y la razón de las distancias de él a los A y B no puede ser igual a la unidad.

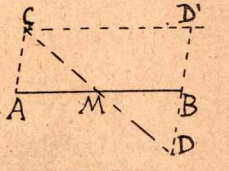


Fig. 178

Se puede salvar esta excepción definiendo *un nuevo ente, llamado punto impropio o punto del infinito, que se considera común a la recta y a todas sus paralelas.* Con esto se consigue que todos los puntos de la recta tengan un conjugado armónico respecto de los extremos de un segmento tomado en ella, siendo el conjugado del punto medio del segmento, el punto del infinito de la recta.

Estos puntos del infinito se consideran como puntos cuya distancia a cualquier punto propio viene representada por ∞.

Teniéndolos en cuenta resulta que dos rectas de un plano siempre tienen un punto común, propio cuando se cortan, y del infinito, cuando son paralelas.

Este caso corresponde en las bisectrices del triángulo, al caso en que éste sea isósceles; y en las circunferencias, al caso en que son del mismo radio, aunque no concéntricas.

·6. *Reciprocidad de los puntos conjugados armónicos. Si dos puntos M y N son conjugados armónicos respecto de otros dos, A, B, también A y B son conjugados armónicos respecto de los M y N.*

Pues de la igualdad

$$\frac{MA}{MB} = -\frac{NA}{NB} \quad \text{se deduce la} \quad \frac{AM}{AN} = -\frac{BM}{BN}$$

111. Rectas conjugadas armónicas

·1. *Propiedad fundamental.* Volvamos a la figura 175 y proyectemos también el punto B desde el C, es decir, tracemos la recta CB, como lo indicamos en la figura 179. Se obtienen así cuatro rectas de un haz, que son CA, CB, CM y CN, que pasan por puntos conjugados armónicos; tienen esta propiedad: *toda recta del plano que no pase por el vértice C, determina con esas cuatro rectas, puntos* (propios o impropios), *tales que dos de ellos son también conjugados armónicos respecto de los otros dos.*

La propiedad que debemos demostrar es la siguiente: Si en una recta tenemos dos puntos M y N conjugados armónicos respecto de otros dos A y B, uniendo los cuatro puntos con un punto cualquiera C, se obtienen cuatro rectas de unión, que al cortarlas por otra recta cualquiera que no pase por C, nos dan como intersección cuatro puntos A'B'M' y N', tales que los M' y N' son también conjugados armónicos respecto de los A' y B' (fig. 179).

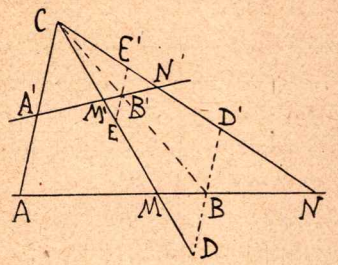


Fig. 179

Y en efecto, tracemos por el punto B una paralela a la AC, y llamemos D y D' a los puntos de intersección con las CM y CN. Se tendrá entonces BD = — BD'. Pues $\frac{BD}{AC} = \frac{MB}{MA}$ y $\frac{BD'}{AC} = \frac{NB}{NA}$ y al ser los puntos dichos conjugados armónicos, los dos segundos miembros de estas igualdades serán iguales, en valor absoluto, y también lo serán los primeros, y por tanto los numeradores.

Si ahora trazamos por el punto B' otra paralela a la AC, o sea a la DD' nos determinará dos segmentos también iguales B'E = — B'E'; puesto que las EE' y DD' son dos paralelas cortadas por concurrentes que determinan partes proporcionales, siendo en este caso la razón de proporcionalidad la unidad.

Y como también es $\frac{B'E}{A'C} = \frac{M'B'}{M'A'}$ y $\frac{B'E'}{A'C} = \frac{N'B'}{N'A'}$ al ser los primeros miembros iguales y de signo contrario, lo serán los segundos; luego $\frac{M'B'}{M'A'} = -\frac{N'B'}{N'A'}$ que nos demuestra el teorema.

A las rectas CM y CN se les llama *conjugadas armónicas* respecto de las CA y CB, con arreglo a esta definición:

·2. *Se dice que dos rectas de un haz son conjugadas armónicas respecto de otras dos del mismo haz, cuando toda recta del plano del haz, que no pase por el vértice, determina*

con las cuatro rectas, puntos tales que dos de ellos son conjugados armónicos respecto de los otros dos.

·3. *Caso de las bisectrices de un ángulo. La bisectriz de un ángulo y la de su adyacente son conjugadas armónicas respecto de los lados del ángulo.* Pues cortando las cuatro rectas por una secante, los pies de las bisectrices son conjugados armónicos respecto de los otros dos puntos (**110** ·4).

·4. *Generalización del teorema anterior.* El teorema anterior (**111** ·1) se generaliza a cuatro rectas cualesquiera de un haz, viniendo así a constituir un teorema que es otra generalización del de las concurrentes cortadas por paralelas (**84** ·3). Puede constituir el punto de partida de una amplísima rama de la Geometría, llamada Geometría proyectiva, por lo cual merece que siquiera hagamos de él una mención. Sin nueva figura podemos suponer que en la 179 las cuatro rectas que parten de C son cualesquiera, de manera que entonces los puntos M y N no serán conjugados armónicos de los A y B, sino que la *razón doble* $\frac{MA}{MB} : \frac{NA}{NB}$ será un número distinto de — 1.

No obstante, se verifica, que *al trazar otra recta cualquiera, como la* A'B', *la nueva razón doble es igual a la anterior:*

$$\frac{M'A'}{M'B'} : \frac{N'A'}{M'B'} = \frac{MA}{MB} : \frac{NA}{NB}$$

Y se demuestra lo mismo, trazando por B y B' paralelas a la AC, y entonces se ve que la primera razón doble es igual a $\frac{B'E}{B'E'}$ por la semejanza de los triángulos de la figura; y la segunda razón doble es igual a $\frac{BD}{B'D'}$ y como estas dos razones últimas son iguales por el teorema de las paralelas cortadas por concurrentes, también serán iguales las referidas razones dobles.

112. Polos y polares respecto de una circunferencia

·1. *Construcción del conjugado armónico por medio de la circunferencia.* Dados dos puntos M y N (figura 180), para hallar el conjugado armónico de un punto P respecto de los M y N se puede construir una circunferencia que tenga por diámetro MN, trazar por P una secante cualquiera, hallar el simétrico, respecto del diámetro, de uno de los puntos A, de intersección de la secante, y unir ese simétrico A', con el otro punto B de intersección de la secante; la recta de unión corta a la MN en un punto, Q, que es el conjugado armónico del P respecto de los M y N.

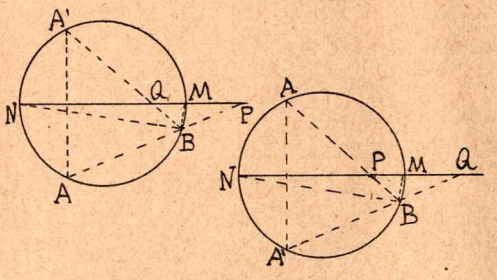


Fig. 108

En efecto, si unimos B con N y M veremos que la BN es bisectriz del ángulo ABA', por ser iguales los arcos AN y NA'; y la BM, perpendicular a la BN, será bisectriz del ángulo adyacente; luego esas dos rectas son conjugadas armónicas respecto de los lados del ángulo (**111** ·3); y al cortarlas por la secante MN determinarán cuatro puntos, dos de los cuales P y Q, son conjugados armónicos respecto de los otros.

·2. *Relaciones métricas entre los segmentos determinados por puntos conjugados armónicos.* Si en la figura 181 son N y M conjugados armónicos respecto de P y Q será, por definición,

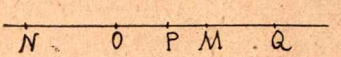


Fig. 181

$$\frac{NP}{NQ} = -\frac{MP}{MQ} = \frac{PM}{MQ}$$

en cuya relación los segmentos se consideran en magnitud y signo, es decir, como *vectores* (4). Para obtener otras formas demostremos el llamado,

Principio de Chasles: Dados tres puntos cualesquiera

O, P, Q *sobre una recta, enunciándolos en cualquier orden tal como* OPQ, *la suma geométrica* $\overline{OP} + \overline{PQ} + \overline{QO}$ *de los vectores que se forman tomándolos de dos en dos en permutación circular, es nula.* Es decir, que se tiene

$$\overline{OP} + \overline{PQ} + \overline{QO} = 0 \quad » \quad \overline{PO} + \overline{OQ} + \overline{QP} = 0$$

$$\overline{OQ} + \overline{QP} + \overline{PO} = 0$$

y lo mismo para las otras tres permutaciones:

PQO, QOP, QPO.

Todas las igualdades son consecuencia inmediata de la definición de suma de vectores (**15** ·4). He aquí una aplicación:

Si el punto O se toma en la recta, como *origen*, los vectores $\overline{OP}$, $\overline{OQ}$ ó sus medidas, con una unidad prefijada, se llaman *abcisas* de P y Q.

Vemos entonces, que cualquiera que sea la posición de O, P, Q enunciándolos en este orden OPQ será siempre $\overline{OP} + \overline{PQ} + \overline{QO} = 0$, de donde

$$\overline{PQ} = -\overline{QO} - \overline{OP} = \overline{OQ} - \overline{OP}$$

luego *un vector es igual a la abcisa de su extremo menos la de su origen.*

Para aplicar esta regla a la figura 181, tomemos como origen el N, y es:

$$\frac{NP}{NQ} = \frac{PM}{MQ} \quad » \quad \frac{NP}{NQ} = \frac{NM - NP}{NQ - NM}$$

$$NP \times NQ - NP \times NM = NQ \times NM - NQ \times NP$$

sumando ahora NQ × NP y dividiendo luego por 2 NP × NQ × × NM, resulta:

$$2\ NP \times NQ - NP \times NM = NQ \times NM$$

$$\frac{1}{NM} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{NP} + \frac{1}{NQ}\right)$$

que se enuncia: MN *es media armónica entre* NP y NQ.

Si tomamos como origen el O medio de NM y aplicamos propiedades de proporciones, será :

$$\frac{OP-ON}{OQ-ON} = \frac{OP+OM}{OQ+OM} = \frac{OM-OP}{OQ-OM} = \frac{2\,OM}{2\,OQ} = \frac{2\,OP}{2\,OM}$$

$OM^2 = OP \times OQ$ que se enuncia: OM *es media geométrica entre* OP y OQ.

·3. *Polo y polar.* Volvamos a la figura 180, reproducida en la 182. Tracemos por Q la perpendicular *p* a la recta PQ y prolonguemos AB, si es preciso, hasta su encuentro con *p* en un punto R. Este R es precisamente el conjugado armónico del P respecto de los A y B de intersección de la circunferencia con la secante que pasa por P, pues al unir Q con A se observa que el diámetro que pasa por Q, y su perpendicular QR, son bisectrices del ángulo AQA' y su adyacente, luego serán conjugadas armónicas respecto de las rectas AQ y A'Q los lados de ese ángulo (**111** ·3), y al ser cortadas las cuatro rectas, por la secante que pasa por P, determinarán cuatro puntos de intersección, dos de los cuales, P y R, son conjugados armónicos respecto de los otros dos A y B.

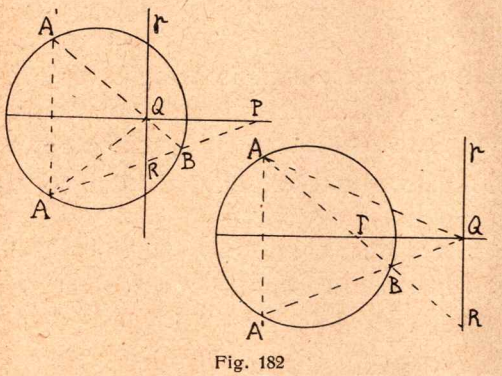


Fig. 182

A esa recta QR, perpendicular al diámetro que pasa por P, en el conjugado armónico de P, respecto de los extremos de ese diámetro, se le llama *polar* del punto P respecto de la circunferencia, y al punto P, *polo* de esa recta QR, respecto de la circunferencia, luego :

Se llama polar de un punto, respecto de una circunferencia, a la recta que contiene los conjugados armónicos de ese punto respecto de los puntos de intersección de toda secante que pase por él con dicha circunferencia. Es perpendicular al

diámetro que pasa por el punto. *Y si una recta es polar de un punto, éste se llama polo de la recta.*

·4. *Distancia del centro al polo y a la polar.* Si llamamos *r* al radio de la circunferencia; *p* a la distancia del centro al polo, y P a la distancia del centro a la polar, se verificará (**112** ·2): $r^2 = p \times P$.

En particular, si el polo está en la circunferencia, para que esta fórmula se siga verificando, tiene que ser entonces $p = r = P$, y por esta causa se considera como *polar de un punto de la circunferencia la tangente que pasa por él*, y como polo de una recta tangente a la circunferencia, su punto de contacto.

Y si el polo es el centro, el factor *p* se anula, y el otro tiene que tomar el valor ∞, para que la anterior fórmula siga verificándose, y por esto, llamando *recta del infinito o recta impropia del plano, la figura impropia formada por todos los puntos del infinito de las rectas del plano* se conviene en decir que *la recta polar del centro de una circunferencia, respecto de la misma circunferencia, es la recta del infinito del plano de ella.*

Ejercicios

Constrúyanse conjugados armónicos de puntos o de rectas en diversos casos, así como polos y polares.

LECCION 21

LINEAS DE SEGUNDO ORDEN

113. La parábola

·1. *Definición. Dada una recta*, d, *y un punto*, F, *de un plano, se llama parábola de directriz* d *y foco* F, *al lugar geométrico de los puntos del plano, que equidistan del foco y de la directriz* (fig. 183).

De manera, que así como el lugar geométrico de los puntos propios de un plano, que equidistan de dos puntos fijos, es la mediatriz del segmento que los une (52); si en vez de ser dos puntos fijos, es un punto y una recta, el lugar geométrico de los puntos del plano, equidistantes de ambos, es una curva llamada parábola.

·2. *Construcción por puntos.* Dado el foco, F, y la directriz, *d*, de una parábola, para construir ésta, trazaremos primero la recta que pasando por el foco es perpendicular a la directriz. El punto medio, V, del segmento FD, distancia del foco a la directriz, será un punto de la parábola, y se llama *vértice*. En la recta FV, que como diremos enseguida, se llama *eje*, no habrá ningún otro punto de la parábola, a no ser el punto del infinito de ese eje, que se considera también como punto de la curva (**110** ·5), porque las distancias desde él al foco y a la directriz, siendo infinitas, pueden considerarse como iguales.

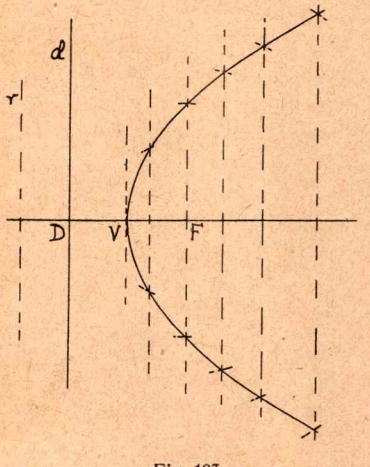


Fig. 183

Para construir nuevos puntos de la parábola, trazaremos perpendiculares al eje; los puntos de intersección de éstas con la curva, deben estar a igual distancia del foco que de la directriz, y como la distancia a la directriz se conoce para cada perpendicular, bastará tomar esa distancia como radio y hacer centro en el foco, con lo cual podremos trazar una circunferencia o parte de ella, que si corta a la perpendicular de que se trate, nos dará en los puntos de intersección, puntos de la parábola.

Por este procedimiento se observa enseguida que las perpendiculares al eje, que estén mas cerca de la directriz que del foco, tales como las *r*, *d*, ... , no tienen puntos comunes con la parábola; la perpendicular que pasa por V, solo tiene este punto; y las demás perpendiculares al eje, o sea las que están más cerca del foco que de la directriz, tienen dos puntos comunes con la curva, los cuales son simétricos respecto del eje, el cual se llama por esto eje de simetría de la parábola, o simplemente eje (78). Uniendo luego por un trazo continuo los diversos puntos obtenidos de la parábola, se puede trazar un trozo de ésta, aproximadamente.

·3. *División del plano por una parábola.* La parábola divide a los demás puntos del plano en dos regiones, la una *exterior*, formada por los puntos que están más cerca de la directriz que del foco, y la otra por los que están más cerca del foco que de la directriz, región llamada *interior*. Las perpendiculares al eje que están más cerca del foco que de la directriz hemos visto que cortan a la parábola en dos puntos, los cuales determinan un segmento para cada una; y los puntos interiores a todos estos segmentos, forman la región interior. La exterior está formada por los demás puntos del plano, excepto los de la parábola.

·4. *Posiciones relativas de una parábola y una recta.* Para estudiar las posiciones relativas de una parábola y una recta de su plano pueden considerarse tres casos :

a). Dada una parábola, y una recta *r*, hallemos el simé-

trico, S, del foco, respecto de *r*, y supongamos primeramente que ese foco F, y su simétrico están en distinto semiplano respecto de la directriz, es decir, que el segmento SF corta, en un punto interior a él, a la directriz (fig. 184). *En este caso, todos los puntos de* r *son exteriores a la parábola, y la recta* r, *se la llama exterior.* En efecto, la distancia de cualquier punto de *r*, al foco es igual que la distancia a su simétrico S, y es claro que la distancia MS es mayor que la distancia de M a la directriz, cualquiera que sea el punto M, de la recta *r*.

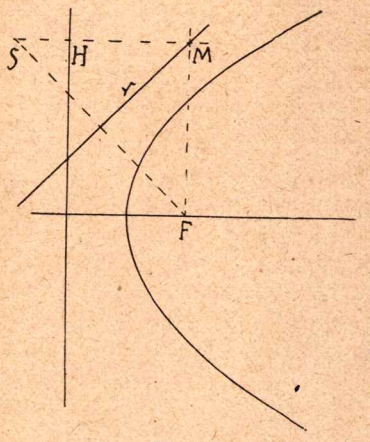


Fig. 184

b). Supongamos en segundo lugar que la recta *r* está situada de manera que el simétrico de F respecto de ella está en la misma directriz (fig. 185). *Entonces la recta* r *tiene un punto común con la parábola y uno solo, siendo los demás puntos de* r *exteriores; la recta* r, *se llama entonces tangente.*

En efecto, tracemos por el simétrico del foco, la perpendicular a la directriz, y llamemos M al punto de intersección de esa perpendicular con la recta *r*, entonces el punto M equidista del foco y de la directriz, por lo cual pertenece a la parábola. En cambio, los demás puntos de *r* distan menos de la directriz que de S, es decir, que de F; luego son exteriores a la curva, como puede verse para los P y Q.

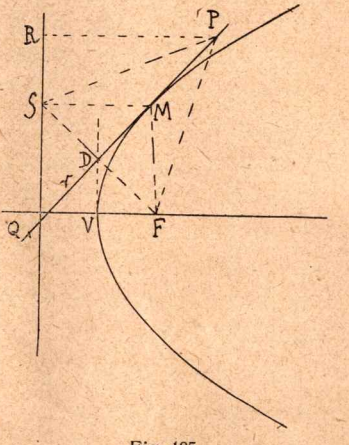


Fig. 185

c) Supongamos, por fin, que la recta *r* está situada de modo que el simétrico del foco respecto de ella, está en el mismo semiplano

que el foco respecto de la directriz; es decir, que el segmento FS no encuentra a la directriz. *Entonces la recta* r *tiene dos puntos comunes con la curva, y se llama secante* (fig. 186).

En efecto; si es que existe en la recta *r* algún punto de la parábola, ese punto tiene que equidistar de F, de S y de la directriz, luego tiene que ser centro de una circunferencia que pase por F, por S y que sea tangente a la directriz. Si la recta FS corta a la directriz en un punto R, la potencia de R, con respecto a la expresada circunferencia, tendrá que ser igual a RS × RF, y la media proporcional entre estos dos segmentos RS y RF tomada en la directriz, dará dos puntos M y N, tales que es

$$RM^2 = RN^2 = RS \times RF.$$

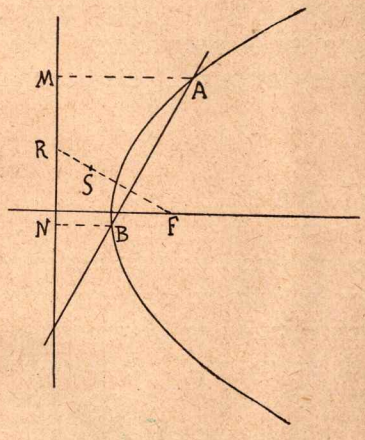


Fig. 186

La circunferencia que pase por S, F y M tendrá su centro en un punto A de intersección de *r* con la parábola, y la que pase por S, F y N tendrá su centro en el otro punto B de intersección. Debiendo observarse que la media proporcional entre RS y RF se puede hallar en la misma figura sin más que trazar una circunferencia cualquiera que pase por F y por S, y la tangente a ella, trazada desde R, nos dará esa media proporcional.

Cuando la recta *r* es paralela al eje de la parábola, parece que no hay más que un punto de intersección, pero es que el segundo es el punto del infinito del eje, que ya hemos dicho que se considera perteneciente a la parábola.

5. *Propiedades de las tangentes.* La discusión anterior, y la figura 185, nos enseñan inmediatamente las siguientes propiedades :

a) *La directriz es lugar geométrico de los simétricos del foco respecto de las tangentes.* Por ejemplo, S está en la directriz.

b) *La tangente en el vértice es lugar geométrico de los pies de las perpendiculares trazadas desde el foco a las tangentes.* Por ejemplo, D que es el pie de la perpendicular FD a la tangente *r*, está en la tangente en el vértice (85).

c) Llamando *radio vector* al segmento que une el foco F

con un punto cualquiera de la parábola, resultará que, *la tangente es bisectriz del ángulo formado por el radio vector que va al punto de contacto y la perpendicular trazada desde ese punto a la directriz.* Por ejemplo, la tangente *r* es bisectriz del ángulo que forman el radio vector FM, y la perpendicular a la directriz, desde M. Es claro, llamando *normal* a la curva en el punto M, la perpendicular a la tangente en M, resultará que la normal es bisectriz del ángulo formado por el radio vector FM y la prolongación de MS por M, o sea la paralela al eje trazada por M y en el sentido VF.

114. La elipse

·1. *Definición. Dada una circunferencia y un punto interior a ella, se llama elipse el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de la circunferencia y del punto dados.*

Sea por ejemplo la circunferencia de centro O y el punto interior a ella F (fig. 187). Dado un punto M del plano, sabemos que entre todas las distancias del punto M a los puntos de la circunferencia, la menor es la del punto S, tal que el segmento SM contiene en una de sus prolongaciones al centro de la circunferencia (59).

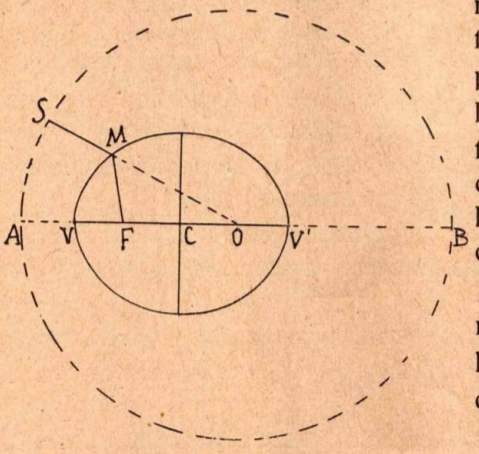


Fig. 187

A la longitud de ese segmento SM es a lo que se llama distancia de M a la circunferencia (**109** ·1).

Si es MS=MF, pertenece M a la elipse definida por la circunferencia y el punto dados.

·2 *Construcción de puntos.*—Dada la circunferencia de centro O y el punto F que definen a la elipse, para construir ésta

podemos proceder análogamente a como lo hicimos en la parábola. Empezaremos por trazar la recta FO (fig. 187), en la cual hay dos puntos de la elipse, el V y V', que se hallan inmediatamente, como puntos medios de los segmentos FA y FB. Después observaremos que las circunferencias concéntricas con la dada, y que tengan sus radios mayores que el segmento OV o menores que el OV', no pueden contener puntos de la elipse, pues todos los puntos de las primeras distan de F más que de la circunferencia dada, y los de las segundas, menos.

Trazaremos, pues, circunferencias concéntricas con la dada, y cuyos radios sean menores que OV y mayores que OV'. La distancia de los puntos de cada una de estas circunferencias a la dada, la conocemos, luego tomándola como radio, y haciendo centro en F, podremos señalar en esas circunferencias los puntos comunes a ellas y a la elipse.

Uniendo esos puntos por un trazo continuo se obtendrá, aproximadamente, la elipse.

·3 *Elementos más notables de la elipse.* Los puntos F y O se llaman *focos* de la elipse, y tienen esta propiedad fundamental: *que la elipse es el lugar geométrico de los puntos del plano, cuya suma de distancias a los focos es constante, e igual al radio* OS. Pues al ser MF = MS, se tiene:

$$MF + MO = MS + MO = OS;$$

por tanto, para que M equidiste de F y de la circunferencia dada, es necesario y suficiente que la suma MF + MO sea igual al radio.

Esta propiedad sirve comúnmente para definir la elipse.

La circunferencia dada, o sea la de centro O y radio MF + MO = OS, se llama *circunferencia directriz*, y también se llama así, a otra circunferencia cuyo centro es F y cuyo radio es igual a OS, ya que los puntos de la elipse equidistan también de esa circunferencia y del punto O, como se ve prolongando FM por M una longitud igual a MO.

La recta que une los focos es *eje de simetría* de la elipse. Pues llamando M' al simétrico de M respecto de FO, será

M'F = MF por ser segmentos simétricos; lo mismo M'O = MO, luego M' pertenece a la elipse, ya que es M'F + M'O = OS.

Lo mismo se demuestra que la mediatriz del segmento FO, o sea del segmento que une los focos es *eje de simetría*, y que el punto de intersección de los dos ejes de simetría, o sea el punto medio del segmento determinado por los focos, es *centro de simetría*. Se le llama *centro de la elipse*. Es el punto C.

Los puntos de la elipse situados en los ejes de simetría se llaman *vértices*. La distancia entre los vértices del eje focal, o sea la VV' es igual a la constante propia de la elipse, pues debien do ser V y V' simétricos respecto del centro C, será VF = V'O, luego VF + VO = OS = V'O + VO = VV'.

A ese segmento VV' igual al OS se le llama *eje mayor* de la elipse, designándosele por *2a*; así como al segmento determinado por los otros dos vértices se le llama *eje menor*, y se le designa por *2b*. Y la distancia entre los focos se la designa por *2c*.

Como la distancia desde uno de estos vértices Q hasta los focos es igual a la *a*, el triángulo rectángulo FCQ nos da esta relación :

$$a^2 = b^2 + c^2 \text{ , o bien } b = \sqrt{a^2 - c^2} \text{ y } c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Al cociente $\frac{c}{a}$ se le llama *excentricidad de la elipse*. Cuando es nula, los focos coinciden y la elipse es una *circunferencia*.

Cuando no es nula, es $a > b$ y por eso se le llama al segmento VV' eje mayor, y al QQ' eje menor.

Todo segmento que una dos puntos de la elipse se llama *cuerda*, y si pasa por el centro se llama *diámetro*.

Por fin, en la elipse hay también rectas llamadas *directrices*, que son dos rectas perpendiculares al eje focal y trazadas por los conjugados armónicos de cada foco respecto de los vértices V y V'.

·4 *Posiciones relativas de una elipse y una recta.* Para hallar las posiciones relativas de una elipse y de una recta

de su plano, distingamos tres casos, como en la parábola :

a) Supongamos primeramente que el simétrico S de un foco F, respecto de la recta dada *r*, es exterior a la circunferencia directriz trazada desde el otro foco O (fig. 188).

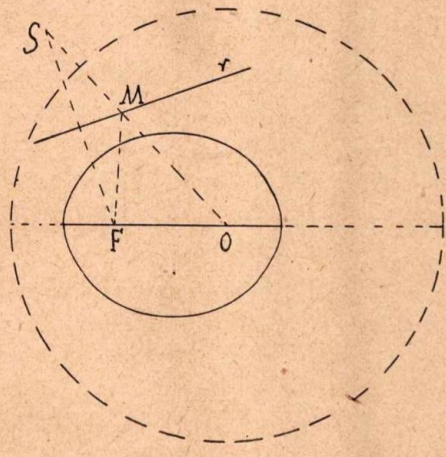


Fig. 188

Vamos a demostrar que *entonces todos los puntos de la recta* r *son tales que la suma de las distancias a los focos es mayor que* 2a; *llamándose por esta causa a esos puntos exteriores a la elipse, y la recta* r, *recta exterior.*

En efecto, uniendo S con O y llamando M al punto de intersección de SO con *r*, se verá que es $MF + MO = MS + MO = SO > 2a$, lo que prueba que M es exterior. Con mayor razón los demás puntos de *r* son exteriores, pues la suma de las distancias de cada uno ellos a F y a O es igual que la suma de las distancias a S y a O, la cual suma tiene que ser mayor que el segmento OS (40).

b) Supongamos en segundo lugar que la recta *r* está situada de manera que el simétrico S del foco F, respecto de ella, esté en la misma circunferencia directriz que tiene su centro en el otro foco O (fig 189).

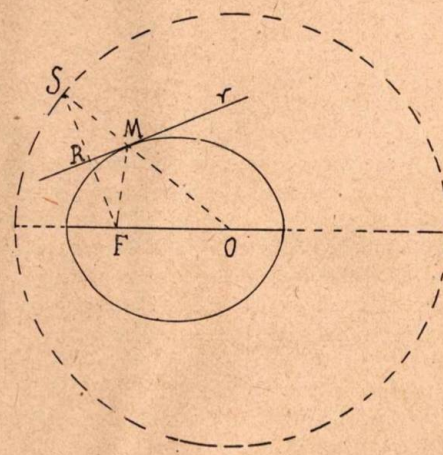


Fig. 189.

Entonces la recta r *tiene un punto común con la elipse,*

siendo los demás puntos de r *exteriores a la curva, y se llama* r *tangente.*

En efecto, trazando como antes la recta SO, el punto M de intersección de ella con la *r* estará en la elipse, pues

$$MF + MO = MS + MO = OS = 2a.$$

Y los demás puntos de *r* son exteriores a la elipse, porque la suma de las distancias de cada uno de ellos a F y O es igual a la suma de las distancias a S y a O, y por tanto, mayor que OS.

c) Consideremos en tercer lugar una recta *r*, tal que el simétrico de F, respecto de ella, sea interior a la circunferencia directriz trazada desde el otro foco O, como puede verse en la figura 190.

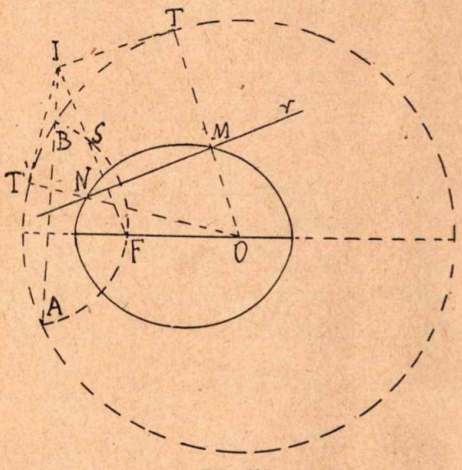


Fig. 190

Entonces la recta r *tiene dos puntos comunes con la elipse, y se llama secante.*

Para demostrarlo, y hallar los puntos de intersección, aunque no esté trazada la curva, basta observar que para que un punto esté simultáneamente en la recta *r* y en la elipse, es preciso y suficiente que equidiste de F, de S y de la circunferencia directriz; o lo que es lo mismo, que sea centro de una circunferencia que pase por F, por S y sea tangente a la circunferencia directriz (**60** ·2). Siendo F, y su simétrico S, interiores a la circunferencia directriz, hay dos circunferencias que cumplen esas tres condiciones. Se hallan, trazando una circunferencia auxiliar que cumpla las dos primeras condiciones, o sea que pase por F y por S; pero que sea secante a la circunferencia directriz. Llamando A y B a los puntos en que la encuentra, se puede ver que las rectas AB y FS tienen un punto común I, propio o impropio, que es exterior a la circunferencia directriz. Las dos tangentes IT, IT', trazadas por I a la circunferencia directriz, nos dan los puntos T y T' de contacto de las circunferencias que se buscan, y unidos con O, nos dan los puntos M y N de intersección de *r* con la elipse; pues verificándose $IS \times IF = IT^2 = IT'^2$ la circun-

ferencia que pase por F, S y T será tangente a la circunferencia directriz, y lo mismo la que pasa por T'.

·5. *Propiedades de las tangentes.* La discusión anterior nos demuestra inmediatamente las siguientes propiedades, que se evidencian en la figura 189.

a) *La circunferencia directriz trazada desde un foco es el lugar geométrico de los puntos simétricos del otro foco respecto de las tangentes a la elipse.* Y así, el simétrico de F respecto de *r* está en la circunferencia directriz trazaza desde O.

b) La circunferencia que tiene su centro en el centro de la elipse y tiene su radio igual al semieje mayor se llama *circunferencia principal*, y como se ve inmediatamente, pasa por el punto R, que es el pie de la perpendicular FR a la tangente *r;* luego *la circunferencia principal es el lugar geométrico de los pies de las perpendiculares trazadas desde los focos a las tengentes.*

c) Llamando *radios vectores* a los que unen cualquier punto de la elipse con los focos, resulta que *la tangente es bisectriz del ángulo que forman un radio vector del punto de contacto, y la prolongación del otro.* La *normal* sera bisectriz del ángulo que forman los radios vectores.

115. La Hipérbola

·1. Definición. Dada una circunferencia de centro O y un punto F en su plano, y exterior a ella, cualquier otro punto del plano, tal como el M (fig. 191), tiene, como sabemos, una distancia máxima y una distancia mínima a los puntos de la circunferencia, que son las MS' y MS, las cuales se hallan trazando la recta que pasa por M y por el centro O (59). Pues bien, si cualquiera de esas dos distancias es igual a la MF, se dice que el punto M pertenece a una curva llamada hipérbola, definida por el punto F y la circunferencia dada. Y así, *se llama hipérbola el lugar geométrico de los puntos de un plano, tales que las distancias máxima o mínima a los puntos de una circunferencia son iguales a las distencias a un punto del plano, exterior a la circunferencia.*

La hipérbola es una curva que consta de dos ramas, según se consideren las distancias mínimas o las distancias máximas a la circunferencia dada.

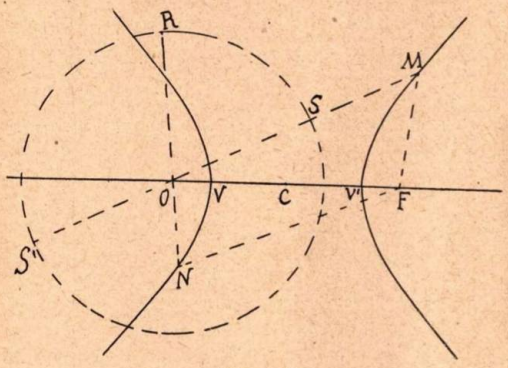


Fig. 191

·2. *Construcción por puntos.* Análogamente que hemos dicho para la elipse, se pueden construir puntos de la hipérbola trazando circunferencias concéntricas con la dada; y como conocemos las distancias máxima y mínima de los puntos de ellas a los de la circunferencia dada, bastará tomar esas distancias como radios y hacer centro en el punto dado, para determinar por medio de arcos, puntos de la hipérbola. Uniéndolos por trazos continuos se tendrá la curva, aproximadamente.

·3. *Elementos más notables de la hipérbola.* Los puntos F y O se llaman *focos* de la hipérbola, y tienen esta propiedad fundamental: *que la hipérbola es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a los focos es constante e igual al radio* OS. Si en esa diferencia se toma como minuendo la distancia a uno de los focos, se obtiene una rama; y si se toma la distancia al otro foco, la otra rama. Y en efecto, se tiene:

$$MO - MF = MO - MS = OS \quad » \quad NF - NO = NR - NO = OR = OS$$

Esta propiedad se toma comúnmente como definición de hipérbola. La circunferencia dada, o sea la de centro O y radio igual a la diferencia de las distancias de un punto de la hipérbola a los focos, se llama *circunferencia directriz;* y también se llama así otra circunferencia cuyo centro es F y cuyo radio es

igual al de la anterior; con respecto a la cual, y al punto exterior O, se puede definir igualmente la misma hipérbola.

La recta que une los focos es *eje de simetría* de la hipérbola, pues la distancia del punto M a los focos, y desde su simétrico, son respectivamente iguales, y las diferencias serán iguales, por lo cual el simétrico de todo punto M de la curva pertenece también a ella.

Igual se demuestra que la mediatriz del segmento que une los focos es también *eje de simetría;* y que el punto común a los dos ejes de simetría, o sea el punto medio C del segmento que une los focos, *es centro de simetría*, llamándose *centro* de la hipérbola.

Los puntos de la hipérbola situados en el eje focal se llaman *vértices*. En el otro eje no hay puntos de la hipérbola.

La distancia entre los vértices, o sea VV', es igual a la constante propia de la hipérbola, o radio de la circunferencia directriz; pues debiendo ser V y V' simétricos respecto de C, es

$$VF - VO = VF - V'F = OS = VV'.$$

A esa distancia de los vértices se le llama *longitud del eje focal*, y se la designa por *2a*, aunque se llama también eje focal a toda la recta VV'.

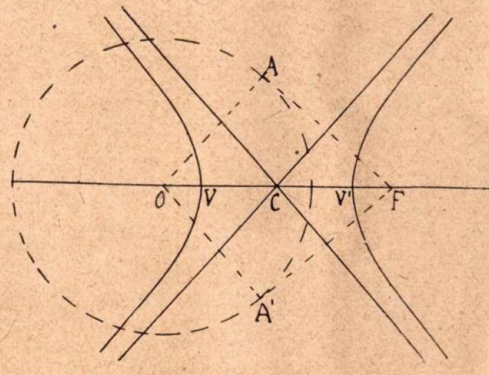


Fig. 192

A la distancia del vértice a uno de los focos se la designa por *c*, y por analogía con la elipse se llama *b* a la distancia dada por la igualdad $b = \sqrt{c^2 - a^2}$, o sea al cateto de un triángulo rectángulo que tenga por hipotenusa *c* y por otro cateto *a*.

Para dar significado geométrico a esta magnitud *b*, supongamos que por el foco

F trazamos las tangentes FA y FA', a la circunferencia directriz trazada desde el otro foco O. Los radios de esta circunferencia, que van a los puntos de contacto determinan dos triángulos rectángulos FOA y FOA' (figura 192).

Las paralelas a esos radios, que pasan por el centro C, y que se llaman *asíntotas*, determinan otros dos triángulos rectángulos FCB y FCB' y es $CF = c$ » $CB = \frac{1}{2} OA = a$ »

$$FB = b$$

Se deduce de aquí inmediatamente que si se trazan por los vértices, dos perpendiculares al eje focal, cortan a las asíntotas en los vértices de un rectángulo, cuyas dimensiones o lados son *2a* y *2b*, y cuya diagonal es *2c*. Puesto que es

$$CV' = a = CB.$$

En el caso particular de que ese rectángulo sea un cuadrado, es decir, de que sea $a = b$, la circunferencia directriz pasa por el centro de la hipérbola, las asíntotas son bisectrices de los ángulos que forman los ejes, y la curva recibe el nombre de *hipérbola equilátera*. Representa respecto de la hipérbola en general, el mismo papel que la circunferencia respecto de la elipse.

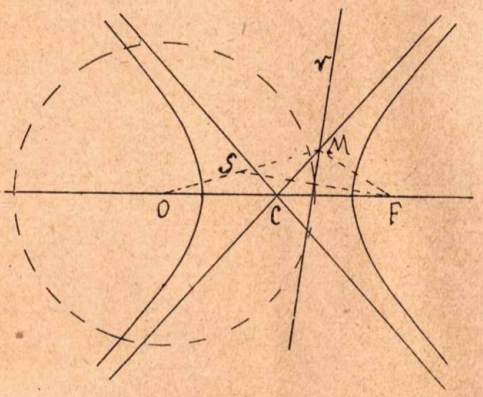


Fig. 193

Al cociente $\frac{c}{a}$ se le llama *excentricidad*. En la elipse es menor que 1, y en la hipérbola mayor.

Los segmentos que unen puntos de la hipérbola se llaman *cuerdas;* y las cuerdas que pasan por el centro se llaman *diámetros*.

Por fin, en la hipérbola hay también dos *rectas directrices*, que son las perpendiculares al eje focal tra-

zadas por los puntos conjugados armónicos de cada foco respecto de los dos vértices.

·4. *Posiciones relativas de una hipérbola y de una recta.* Para estudiar las posiciones relativas de una hipérbola y una recta de su plano, distingamos tres casos.

a). Supongamos primeramente que en el plano de una hipérbola se nos da una recta, *r*, tal que el simétrico de un foco respecto de ella es interior a la circunferencia directriz, cuyo centro es el otro foco (figura. 193).

Entonces la recta r *tiene todos sus puntos de manera que la diferencia de las distancias de cada uno de ellos a los focos es menor que 2a*, llamándose por eso puntos *exteriores* a la hipérbola, y la recta *r*, *exterior* a la hipérbola.

Pues trazando la recta OS, que une el foco O con el simétrico S, del otro foco, F, y llamando M al punto en que esa recta corta a la *r*, se verificará

$$MO - MF = MO - MS = OS < 2a$$

luego el punto M es exterior a la hipérbola. Los demás puntos de *r*, con mayor razón son exteriores, porque la diferencia de las distancias de cada uno de ellos a los F y O, es decir, a los S y O es menor que OS (40).

b). Supongamos en segundo lugar que la recta *r* está situada de manera que el simétrico del foco F respecto de ella esté situado en la misma circunferencia directriz trazada desde el otro foco, como se ve en la figura 194.

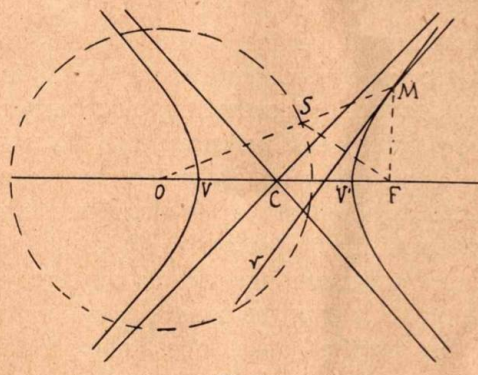


Fig. 194

Entonces la recta tiene un punto común con la hipérbola, siendo los demás puntos exteriores. Se llama *tangente.* Y en efecto, trazando como antes la recta que une el simétrico

del foco, S, con el centro de la circunferencia directriz, O, y llamando M al punto de intersección con *r*, será M punto de la hipérbola, pues se tiene

$$MF - MO = MF - MS = OS = 2a;$$

y los demás serán exteriores, por ser la diferencia de las distancias a los focos, o sea a S y O, menor que 2a.

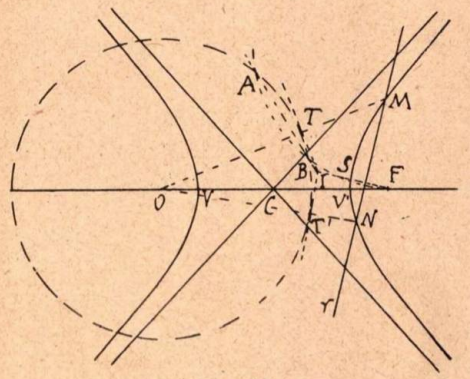


Fig. 195

c). Consideremos finalmente una recta *r*, tal que el simétrico del foco respecto de ella es exterior a la circunferencia directriz (figura 195).

Entonces la recta r *tiene dos puntos comunes con la curva, y se llama secante.*

Se demuestra lo mismo que para la elipse. Trazando una circunferencia que pase por F y su simétrico, y corte a la circunferencia directriz en A y B, la recta AB y la SF se cortarán en un punto propio o impropio I, exterior a la circunferencia directriz, y las tangentes a ésta, trazadas desde él, nos dan los puntos de contacto T y T', que al unirlos con O, nos dan los M y N de intersección de *r* con la hipérbola.

En particular el haz de rectas de vértice C queda dividido por las asíntotas en dos partes; una que contiene al eje focal, y la otra, que no lo contiene. Aplicando los teoremas que acabamos de demostrar se verá, que las rectas de la primera parte son *secantes*, las de la segunda *exteriores*, y las asíntotas son tales que el simétrico de F respecto de ellas está en la circunferencia directriz; luego deben considerarse como *tangentes;* pero al hallar el punto de contacto de cada asíntota nos encontramos con que la recta OS es paralela a ella, y el punto común es el *punto del infinito* de la asíntota. Se supone, pues, que la hipérbola tiene *dos puntos del infinito*, que son los de sus asíntotas, puntos que pertenecen al mismo tiempo a las dos ramas.

Las paralelas a las asíntotas son secantes, pero uno de los puntos de intersección con la hipérbola está en el infinito.

·5. *Propiedades sobre las tangentes.* La discusión anterior nos demuestra inmediatamente las siguientes propiedades, que se evidencian en la figura 194 :

a) La circunferencia directriz trazada desde un foco es el lugar geométrico de los puntos simétricos del otro foco respecto de las tangentes a la hipérbola.

b). Hay también, como en la elipse, una *circunferencia principal*, de centro C, y radio *a*, y es también *lugar geométrico de los pies de las perpendiculares del foco a las tangentes.*

c). También como en la elipse hay *radios vectores*, pero aquí *la tangente es bisectriz del ángulo formado por los que van al punto de contacto;* y la *normal* será bisectriz del ángulo formado por un radio vector y la prolongación del otro.

·6. *Otras líneas de segundo orden.* Se consideran así la figura formada por dos rectas, o una recta considerada como doble, o un segmento considerado como doble; pues lo mismo que la elipse, parábola e hipérbola no pueden ser *cortadas* por una recta mas que en dos puntos a lo sumo. Esta es la razón de llamarse líneas de segundo orden; llamándose en general línea plana de orden *n* a la que no puede ser cortada por una recta de su plano mas que a lo sumo en *n* puntos.

Ejercicios

Constrúyanse líneas de segundo orden y trácense sus principales elementos. Trácense tangentes y secantes y hállense los puntos de contacto e intersección sin estar trazada la curva.

LECCIÓN 22

ECUACIONES DE LA RECTA Y DE LAS LÍNEAS DE SEGUNDO ORDEN

116. Ecuación de la recta.

·1. *Coordenadas cartesianas rectangulares.* Sabemos por Aritmética que para determinar los puntos de un plano suelen tomarse dos ejes perpendiculares, llamados *ejes coordenados*, que hay costumbre de designarlos con las letras X'X el uno, y el otro, Y'Y. Dado un punto del plano, la paralela al eje X'X trazada por él corta al eje Y'Y, en un punto, cuya distancia al *origen*, o punto común a los ejes, tomada en magnitud y signo, se llama *ordenada* del punto; y la paralela al eje Y'Y, trazada por el punto, corta al eje de las X'X, en otro punto cuya distancia al origen, tomada en magnitud y signo, se llama *abcisa* del punto. Por esto, al eje X'X se le llama eje de abcisas, y al Y'Y eje de ordenadas. A la abcisa y a la ordenada de un mismo punto se llaman sus *coordenadas* (fig. 196).

Aunque los ejes no sean rectangulares, es decir, formen ángulos no rectos o ángulos *oblicuos*, sirven las mismas denominaciones.

A veces se llaman coordenadas de un punto, no las distancias dichas, sino sus medidas con una unidad común.

·2. *Ecuación de una línea.* Dada una línea en el plano, se suelen designar con las letras x, y dos variables cuyos valores son, respectivamente, la abcisa y ordenada de cada punto de la línea.

Una relación o ecuación entre la x, e y que suele tener esta forma $f(x, y) = o$; ó esta otra $y = f(x)$ se dice que es la *ecuación* de esa línea, cuando las coordenadas de todo punto de la línea verifican la ecuación, es decir, constituyen una solución, y recíprocamente, toda solución de la ecuación corresponde a un punto de la línea que tiene por coordenadas los valores de esa solución.

·3. *Ecuación de la recta.* Supongamos que la línea cuya ecuación queremos hallar es una recta AB (fig. 196).

La abcisa de un punto cualquiera B será en magnitud y signo la distancia OM, y la ordenada será igual a la MB. Si suponemos que B es un punto arbitrario, a la abcisa de él la podemos designar con la letra x; a la ordenada, con la y. Busquemos una relación entre estas variables.

Trazando por el punto A, en que la recta encuentra al eje de ordenadas, una paralela al eje de abcisas, queda descompuesta la y en dos partes MN y NB; o más en general, llamando N al punto en que dicha paralela corta a la recta que contiene y, será $y = \overline{MB} = \overline{MN} + \overline{NB}$ (**112** ·2); MN puede ser positivo, negativo o nulo, y su longitud relativa se la suele llamar *ordenada en el origen*, porque es la ordenada del punto A, en que la recta corta al eje de ordenadas; la designaremos por y_o. Será, pues, $y = y_o + NB$. Para hallar ahora el valor variable de NB, en función de x, acudamos al triángulo ANB, en el cual se tiene que NB es un cateto, siendo x el otro cateto, puesto que es OM = AN.

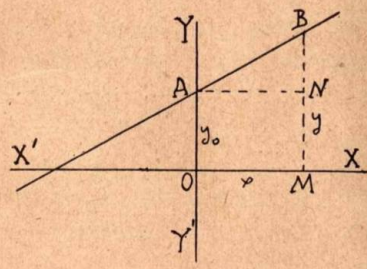


Fig. 196

Aplicando el teorema de que un cateto es igual al otro cateto por la tangente del ángulo opuesto al primero, o más en general, la definición misma de tangente trigonométrica será

$$NB = AN \times \text{tg. } \hat{NAB}.$$

Y si no queremos aplicar la Trigonometría, observaremos simplemente que la relación $\frac{NB}{AN}$ es constante para todos los puntos de la recta, y la podemos designar con la letra *m*, con lo cual será :

$$\frac{NB}{AN} = m \quad » \quad NB = AN \times m = m \cdot x \quad » \quad y = y_o + m \cdot x.$$

Al coeficiente *m* se le designa con el nombre de *pendiente de la recta con relación al eje de abcisas*.

Esa es la ecuación de la recta, pues como vemos, todo punto de ésta verifica la ecuación, y recíprocamente los valores (x_1, y_1) de una solución de la ecuación serán las coordenadas de un punto de la recta, ya que al ser solución, será $y_1 = y_o + m x_1$, y si llamamos y'_1 al punto de la recta, que tiene por abcisa x_1, será $y'_1 = y_o + mx_1$, luego $y'_1 = y_1$.

Cuando la recta es paralela al eje de ordenadas el valor de *m* es ∞, y para representar siempre la recta por una ecuación de coeficientes finitos, se transforma la anterior multiplicando por una constante arbitraria *b*, y pasando todo al primer miembro, con lo que se tiene $b y - b y_o - b m x = 0$, y haciendo ahora $-b m = a$ » $-b y_o = c$, es $a x + b y + c = o$, ecuación lineal con dos variables.

En particular las paralelas al eje de ordenadas tienen sus ecuaciones de la forma $a x + c = o$, o bien $x =$ constante.

117. Ecuación de la circunferencia

1. *Casos de ejes que pasan por el origen.* Cuando se tiene una circunferencia de radio *r* y se quiere hallar su ecuación respecto de dos ejes coordenados que pasan por el origen (fig. 197), se puede observar que la ordenada y la abcisa de un punto cualquiera forman con el radio que va a ese punto un triángulo rectángulo, en el cual, aplicando el teorema de Pitágoras, se tendrá : $x^2 + y^2 = r^2$.

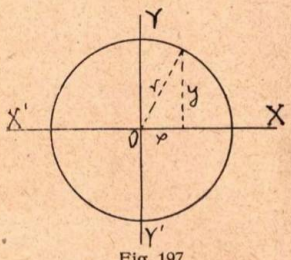


Fig. 197

·2. *Caso de ejes cualesquiera.* Si queremos hallar la ecuación de la circunferencia de radio *r*, tomando por ejes dos perpendiculares cualesquiera de su plano, se observará (figura 198) que también se forma un triángulo rectángulo con el radio, y las diferencias, entre las coordenadas de un punto cualquiera de la circunferencia y las respectivas coordenadas del centro, que si las llamamos *a*, *b*, se tendrá :

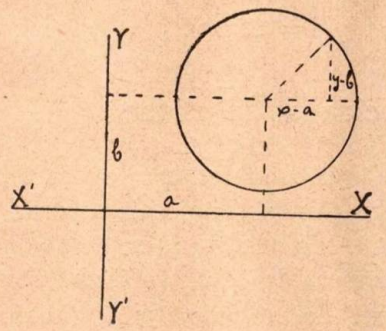


Fig. 198

$$(y - b)^2 + (x - a)^2 = r^2$$

118. Ecuación reducida de la parábola

Hallemos la ecuación de una parábola referida a su eje de simetría como eje de abcisas y a su tangente en el vértice como eje de ordenadas (fig. 199). Para ello llamemos, como es costumbre, con la letra *p*, la distancia del foco a la directriz, distancia que se llama *parámetro*.

Recordemos la definición de parábola, según la cual la distancia de un punto cualquiera de ella al foco, tiene que ser igual a la distancia a la directriz (113) y observemos que la distancia al foco, que es igual a $MF = ML = x + \frac{p}{2}$ forma un triángulo rectángulo con la ordenada *y* como cateto, y la diferencia $PV - VF = x - \frac{p}{2}$ como otro cateto, por lo cual

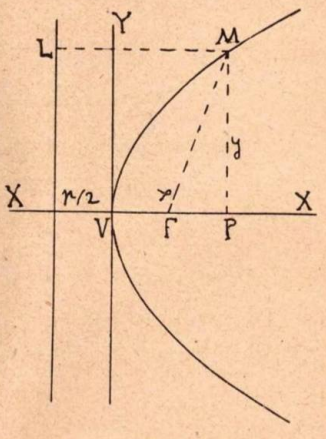


Fig. 199

será $y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{p}{2}\right)^2$; y como la diferencia de

cuadrados de dos cantidades es igual a la suma por la diferencia de las mismas, se tendrá :

$$y^2 = 2x \times p \quad » \quad y^2 = 2px.$$

119. Ecuación reducida de la elipse

Hallemos ahora la ecuación de la elipse referida al eje focal, como eje de abcisas, y al otro eje de simetría como eje de ordenadas (fig. 200). Observemos para ello que la ordenada de un punto cualquiera de la curva forma con las distancias de ese punto a los focos, y con el eje focal dos triángulos rectángulos, que tienen por hipotenusas dichas distancias, a las que llamaremos d y d', y los otros catetos, distintos del y, son

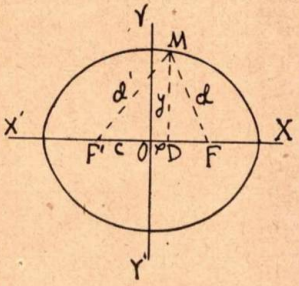


Fig. 200

$$DF = OF - OD = c - x \quad » \quad F'D = c + x$$

Aplicando el teorema de Pitágoras a estos triángulos rectángulos se tendrá :

$$d'^2 = y^2 + (c + x)^2$$
$$d^2 = y^2 + (c - x)^2$$

Restando ordenadamente estas dos ecuaciones, y recordando que la diferencia de cuadrados es igual a la suma por la diferencia, resulta :

$$d'^2 - d^2 = (d' + d) \cdot (d' - d) = (c + x)^2 - (c - x)^2 = 2c \cdot 2x$$

Pero por tratarse de una elipse la suma $d' + d$ es constantemente igual a $2a$ (**114** · 3), luego se tiene :

$$2a \cdot (d' - d) = 2c \cdot 2x \quad » \quad \left\{ \begin{array}{l} d' - d = \frac{2cx}{a} \\ d' + d = 2a \end{array} \right\} \quad » \quad d' = \frac{cx}{a} + a$$

Poniendo este valor de d' en la primera ecuación obtenida,

y haciendo operaciones de reducción, resultará sucesivamente

$$\left(\frac{cx}{a} + a\right)^2 = y^2 + (c + x)^2 \quad »$$

$$\frac{c^2x^2}{a^2} + a^2 + 2cx = y^2 + c^2 + x^2 + 2cx$$

$$y^2 + x^2 - \frac{c^2x^2}{a^2} = a^2 - c^2 \quad »$$

$$y^2 + \frac{a^2 - c^2}{a^2} x^2 = a^2 - c^2$$

Pero suele escribirse esta ecuación de manera que figura en ella, en vez de la semidistancia focal *c*, la longitud *b* del eje menor, que guarda con *a* y *c* la conocida relación $b^2 = a^2 - c^2$, luego es

$$y^2 + \frac{b^2}{a^2} x^2 = b^2 \quad » \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

En el caso particular de que la elipse tuviese los ejes iguales, es decir, $a = b$ sería una circunferencia y su ecuación tomaría la forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, ó sea $x^2 + y^2 = a^2$, como hemos visto antes (117).

120. Ecuación reducida de la hipérbola

La ecuación de la hipérbola, referida al eje focal como eje de abcisas y al otro eje como eje de ordenadas, se obtiene de la misma manera que hemos dicho para la elipse, pero teniendo en cuenta que entonces no es la suma de las distancias *d* y *d'* igual a *2a*, sino la diferencia $d' - d = 2a$; y que la magnitud *b* viene entonces dada por la fórmula $b^2 = c^2 - a^2$ (**115** ·3). Todo se reduce a cambiar algunos signos en las igualdades anteriores, llegándose finalmente a la fórmula $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Si la hipérbola fuera equilátera, o sea $a = b$, la ecuación sería

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad » \quad x^2 - y^2 = a^2 .$$

121. Ecuación general de las líneas de segundo orden

La ecuación general de las líneas de segundo orden, referidas a dos ejes rectangulares cualesquiera de su plano, es la ecuación general de segundo grado con dos variables, a saber :

$$Ax^2 + By^2 + Cyx + Dx + Ey + F = o$$

Y en efecto, supongamos que se quieren hallar los puntos comunes a la línea representada por esta ecuación, y a una recta, que vendrá representada por la ecuación de primer grado con dos variables (116), o sea $Mx + Ny + P = o$.

Las coordenadas de esos puntos comunes deberán satisfacer a las dos ecuaciones a la vez, y serán por tanto las soluciones del sistema que forman ambas ecuaciones. Para resolver ese sistema eliminaremos una de las incógnitas, por ejemplo, la y. despejándola en la de primer grado, que dará $y = mx + n$, y sustituyendo este valor en la de segundo grado, que se convertirá en

$$Ax^2 + B(mx + n)^2 + Cx(mx + n) + Dx + E(mx + n) + F = o$$

Esta ecuación es de una incógnita y de segundo grado, y tendrá, en general, *dos soluciones* reales y desiguales, o reales e iguales, o imaginarias conjugadas, soluciones que con los dos valores correspondientes de la y forman las dos soluciones del sistema.

Resulta, pues, que la línea representada por la ecuación de segundo grado con dos variables puede ser cortada por una recta o en *dos puntos* reales y distintos (recta secante), o en dos puntos reales confundidos en uno solo (recta tangente), o no tiene ningún punto común con ella (recta exterior), diciéndose, sin embargo, que tiene dos puntos imaginarios comunes.

Esa línea es pues de segundo orden, y se demuestra en Algebra que solo las ecuaciones del tipo anterior tienen esa propiedad.

En el caso general en que la ecuación representa una curva, para saber de qué clase es, se hallan las soluciones infinitas reales. Si hay dos, es hipérbola, si hay una, parábola, y si no hay, elipse (Algebra).

Ejercicios

Dadas líneas rectas y de segundo orden, hállense sus ecuaciones.
Decir la clase de curva representada por la ecuación

$$x^2 + y^2 + 2xy + 3 = 0.$$

LECCIÓN 23

EQUIVALENCIA DE LOS POLÍGONOS

122. El concepto de polígonos equivalentes

·1. *Definición. Dos polígonos los llamaremos equivalentes cuando se pueden descomponer en otros polígonos respectivamente iguales.*

Para entender esta definición, advertiremos que un polígono P se dice que se descompone en *n* polígonos, A, B, C..., H, cuando todo punto del P pertenece a uno, por lo menos, de esos *n* polígonos; pero éstos no tienen entre sí puntos interiores comunes. Pues bien, si otro polígono P' se puede descomponer en otros *n* polígonos, respectivamente iguales a los anteriores (**46** ·1), se dice que los P y P' son equivalentes.

Como ejemplo, supongamos un paralelogramo, tal que, al trazar por un vértice una altura le descompone en un triángulo rectángulo y un trapecio (fig. 201). Y supongamos un rectángulo que tenga igual base y altura que las del paralelogramo. Ambos cuadriláteros son equivalentes, porque también el rectángulo se puede descomponer en un triángulo y un trapecio, respectivamente iguales a los que forman el paralelogramo, sin más que trazar por un vértice una oblicua conveniente.

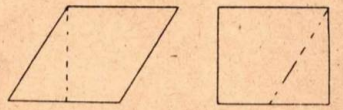


Fig. 201

·2. *Primeras propiedades.* La equivalencia de polígonos así definida cumple las tres propiedades características de toda equivalencia :

a) *Reflexiva : todo polígono es equivalente a sí mismo.* Pues es igual a sí mismo.

b) *Simétrica: Si un polígono es equivalente a otro, éste lo es al primero* Pues si A es equivalente a B, se podrá descomponer A en polígonos iguales a otros en que se descomponga B; luego éste habrá quedado descompuesto en polígonos iguales a los del A.

c) *Transitiva: Dos polígonos equivalentes a un tercero son equivalentes entre sí.* Es decir, si dos polígonos A y B son equivalentes a otro C, los A y B son equivalentes entre sí.

Pues si los A y C son equivalentes se podrán descomponer en partes respectivamente iguales, y lo mismo los B y C. Pero supongamos que se efectúa primeramente la descomposición de A y C, después la de B y C, y por fin se trazan en C las líneas de ambas descomposiciones. Por ejemplo, en la figura 202, suponemos que el A es un paralelogramo, y el C un rectángulo de igual base y altura, y descomponibles en dos triángulos respectivamente iguales. El B es un rectángulo que tiene una altura mitad de la del C, y una base doble, y se descomponen ambos en dos rectángulos, respectivamente iguales. Luego, tracemos en el C las líneas de ambas descomposiciones, es decir, la diagonal, que lo descomponía en partes iguales a las del A, y la paralela a las bases, que lo descompone en partes iguales a las del B.

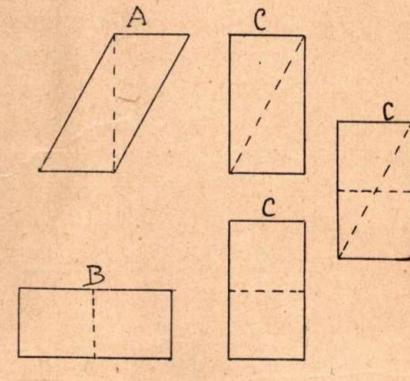


Fig. 202

Con esta doble descomposición habrá quedado C descompuesto en polígonos, que por una parte componen los que forman el A, y por otra, los que forman el B; lo cual nos dice que A y B podemos descomponerlos en polígonos respectivamente iguales a esos de C, y por tanto, iguales entre sí; luego A y B son equivalentes.

123. Suma de polígonos adyacentes

1. Cuando varios polígonos A, B, C..., H, que no tienen puntos interiores comunes, componen otro polígono P, se dice que éste es la *suma* de los primeros. Se designa A+B+C+...+H.

·2. Esta suma de polígonos tiene las tres propiedades fundamentales :

a) *Uniforme.* Sumas de polígonos equivalentes son equivalentes. Es decir, que si A es equivalente a A', y B lo es a B', será A + B equivalente a A' + B'. Pues descomponiendo A y B en partes respectivamente iguales, y A' y B' también, las sumas quedarán descompuestas en partes respectivamente iguales, y serán equivalentes.

b) *Conmutativa.* La suma A + B es equivalente a la B + A. Pues el polígono A + B se compone de partes respectivamente iguales a las del B + A, y son, por tanto, equivalentes.

c) *Asociativa.* La suma (A + B) + C es equivalente a la A + (B + C). Por análoga razón.

Estas propiedades, así como la definición de suma, se generalizan a las figuras cualesquiera formadas por polígonos que no tienen puntos interiores comunes, para las cuales es válida la definición dada de equivalencia y sus consecuencias.

124. Equivalencia de paralelogramos.

·1. *Equivalencia de un paralelogramo y un rectángulo. Todo paralelogramo es equivalente a un rectángulo que tenga igual base e igual altura.* Para demostrarlo consideremos tres casos :

a) Supongamos primeramente un paralelogramo ABCD, (figura 203), tal que al trazar la altura que parte de un vértice D, el pie de ella M, resulta interior al lado AB. El paralelogramo será entonces equivalente al rectángulo DMNC, que se forma trazando las dos alturas DM y CN; pues ambos se componen de un trapecio MBCD, y un triángulo que es igual en ambos, a saber $_{A}^{D}M = {}_{B}^{C}N$ y ese rectángulo, que resulta equivalente al paralelogramo, tiene igual base y altura que él.

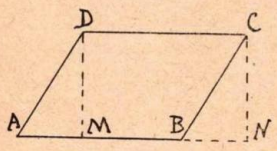


Fig. 203

b) Supongamos ahora que la altura trazada desde el vértice D, tiene su pie, precisamente en el vértice B (fig. 204). Enton-

ces también el paralelogramo es equivalente al rectángulo que se obtiene trazando las dos alturas DB y CN; pues se componen de un triángulo BDC, que es el mismo para los dos, y otros dos triángulos iguales.

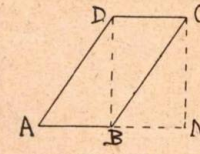


Fig. 204

c) Supongamos, por fin, que la altura trazada desde el vértice D corta el segmento AB en una de sus prolongaciones (fig. 205). Entonces unamos B con D, tracemos por A una paralela a la recta BD, y prolonguemos CD hasta que la prolongación corte a esa paralela en un punto D'. Se forma un nuevo paralelogramo equivalente al dado, porque tienen una parte común ABD, y dos triángulos iguales. El nuevo paralelogramo ABDD', o está en uno de los dos casos anteriores, y será equivalente a un rectángulo de igual base y altura, ocurriéndole lo mismo al ABCD (**122** ·2); o está también en el caso c), y uniríamos B con D', haciendo análoga construcción, obteniéndose otro punto D'', etc. Y como los segmentos CD, DD', D'D'',... son iguales al AB tendrá que llegar un momento en que la perpendicular a la recta AB desde uno de los vértices superiores D' o D'', etc., encuentre al segmento AB (**17** ·4); en cuyo caso el último paralelogramo, y por consiguiente los anteriores, son equivalentes a un rectángulo de igual base e igual altura.

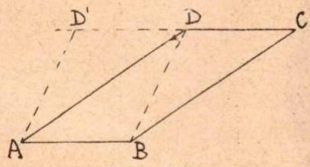


Fig. 205

·2. *Equivalencia de paralelogramos entre sí. Dos paralelogramos de igual base e igual altura son equivalentes.* Pues ambos son equivalentes a un rectángulo de igual base e igual altura que ellos, y por tanto ellos mismos son equivalentes entre sí (**122** ·2).

125. Equivalencias de triángulos y trapecios

·1. *Caso de triángulos. Todo triángulo es equivalente a un paralelogramo de igual base y mitad de altura; o a un pa-*

ralelogramo de igual altura y mitad de base; o a la mitad de un paralelogramo de igual base y altura.

Los tres casos corresponden a las figuras siguientes :

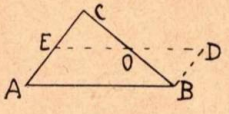


Fig. 206

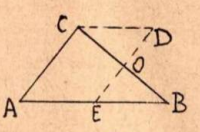


Fig. 207

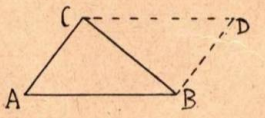


Fig. 208

En la primera (fig. 206) se ha trazado por E, punto medio de AC, una paralela al lado AB, y por B una paralela al lado AC. Se forman dos triángulos iguales ${}_{E}{}^{C}{}_{O} = {}_{D}{}^{B}{}_{O}$, lo que prueba que el triángulo ABC es equivalente al paralelogramo ABDE, que tiene igual base y mitad de altura, ya que la distancia de C hasta AB es dividida por ED en dos partes iguales.

En la segunda (fig. 207) se ha trazado por O, punto medio de BC, una paralela al lado AC, y por C una paralela al AB, resultando un paralelogramo AEDC equivalente al triángulo, y de igual altura y mitad de base que él.

Y en la tercera, las dos paralelas por C y B a los lados opuestos determinan un paralelogramo, que se compone de dos triángulos iguales al ABC, y esto quiere decir, que éste es la mitad.

·2. *Caso de trapecios. Todo trapecio es equivalente a un paralelogramo que tenga por base la paralela media, y por altura la misma que el trapecio; o a un triángulo que tenga por base la suma de las bases del trapecio, y por altura la misma que éste.*

Se evidencia con las figuras siguientes :

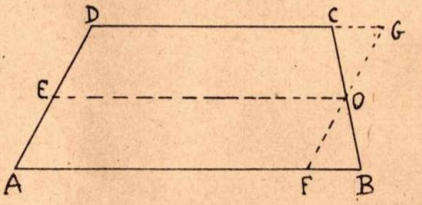


Fig. 209

En la 209 se ha trazado por el punto, O, medio de CB, la paralela media del trapecio, OE, y la recta FG, paralela al lado AD. Se ha formado así un paralelogramo AFGD, evidente-

mente, equivalente al trapecio dado. Y en la 210 se ha unido el vértice D con el punto O, medio de CB, y prolongado la recta de unión hasta que encuentra a la recta AB en F; formándose un triángulo AFD, equivalente al trapecio, y que tiene igual altura que él, y por base la suma de las bases del trapecio AF.

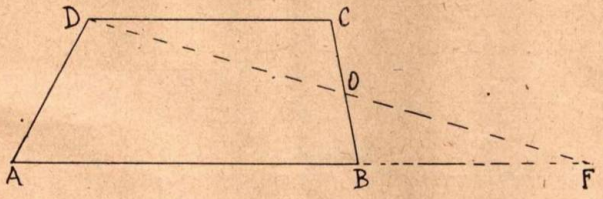


Fig. 210

126. Transformaciones de polígonos en otros equivalentes

1. *Transformación de un polígono en otro equivalente y con un lado menos.* Sea el polígono ABCDEA. Elegidos arbitrariamente tres de sus vértices consecutivos, B, A, E, por A se traza la paralela a la diagonal BE, y se prolonga uno de los lados que concurren en B o E hasta que encuentre a esta paralela en un punto A'. Uniendo A' con el otro vértice, B, se forma un polígono BCDA' (figura 211), que tiene un lado menos que el primitivo, y que es equivalente a él. Tienen, en efecto, ambos polígonos, una parte común, BCDE, y las partes no comunes son dos triángulos equivalentes: El BEA y el BEA', que tienen la misma base, BE, e igual altura, que es la distancia entre las paralelas BE y AA'.

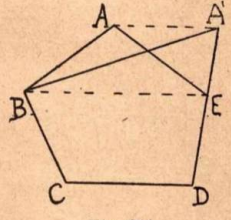


Fig. 211

Repitiendo esta transformación un número suficiente de veces podemos llegar a transformar el polígono en un *triángulo* equivalente a él.

·2. *Transformación de un rectángulo en otro equivalente, de base dada.* Dado un rectángulo ABCD (figura 212), para transformarlo en otro rectángulo, cuya base sea AM, trazaremos por M una perpendicular a la AB, que cortará a la otra base DC o a su prolongación, en un punto P. La recta AP corta al lado BC, o a su prolongación, en un punto Q, y trazando por él una paralela a las bases se obtendrá un rectángulo, AMNO, equivalente al dado, ABCD.

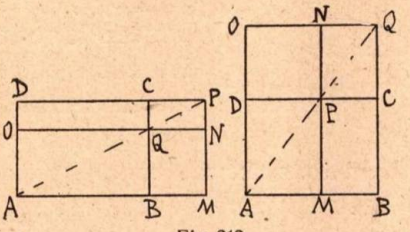


Fig. 212

Y en efecto, ambos rectángulos tienen una parte común, y las partes no comunes son dos rectángulos formados a ambos lados de la diagonal AP, que vamos a demostrar que son equivalentes. Pero lo vamos a demostrar aplicándolo al paralelogramo en general, pues la demostración y construcción anterior no es exclusiva del rectángulo, sino que se aplica a todo paralelogramo. Constituye un teorema que se llama :

Teorema del gnomon. Si en un paralelogramo se traza una diagonal, y por un punto de ella se trazan dos paralelas a los lados, los paralelogramos formados a ambos lados de la diagonal son equivalentes (figura 213) Es decir, que en la figura son equivalentes los paralelogramos rayados. Si desde ahora admitiéramos la equivalencia por diferencia, es decir, que diferencias de polígonos equivalentes son equivalentes, podríamos demostrar muy fácilmente el teorema; pues la diagonal AC divide al paralelogramo total en dos triángulos iguales, ACD y ACB; y si a esos dos triángulos les quitamos dos triángulos a cada uno, que son respectivamente iguales, a saber ${}_{A}{}^{E}{}_{O} = {}_{A}{}^{F}{}_{O}$ » ${}_{C}{}^{H}{}_{O} = {}_{C}{}^{G}{}_{O}$, las diferencias, que son los paralelogramos rayados, serían equivalentes.

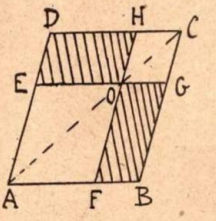


Fig. 213

Pero puede demostrarse el teorema del gnomon acudiendo

solamente a la equivalencia por suma, es decir, a la definición que dimos de polígonos equivalentes (122) y a sus consecuencias.

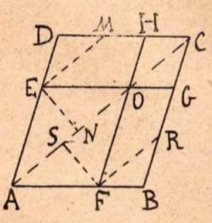


Fig. 214

Basta para ello trazar por E y por F una paralela y una perpendicular a la diagonal AC (fig. 214), con lo cual resultará que los paralelogramos cuya equivalencia queremos demostrar, son desde luego equivalentes respectivamente a otros dos que tienen igual base y altura que ellos: OCRF y OCME; pero éstos son equivalentes a los rectángulos que tienen de dimensiones, o sea de base y altura, el uno FR y FS, base y altura del dicho rectángulo y del paralelogramo OCRF; y el otro EM y EN, base y altura del segundo rectángulo y del paralelogramo OCME. Y como es FR = EM y FS = EN, los rectángulos serán equivalentes, y los paralelogramos también.

·3. *Transformación de un polígono cualquiera en un rectángulo de base dada.* Hemos visto cómo se puede transformar un polígono en otro equivalente que tenga un lado menos, y por consiguiente en un triángulo. Pero éste es equivalente a un paralelogramo, de igual base y mitad de altura, y el paralelogramo a un rectángulo de igual base y altura; transformando por fin este rectángulo en otro cuya base sea la dada, quedará el polígono transformado en un rectángulo equivalente, que tenga la base dada.

·4. *Postulado de la equivalencia de polígonos.* Esta transformación se puede efectuar de muchas maneras, y nos puede caber la duda de si se obtendrán rectángulos diferentes según sea el procedimiento. Es decir, si un polígono, P, lo transformamos en un rectángulo R, equivalente, y por otro procedimiento transformamos P, en otro rectángulo R' equivalente, y de igual base que el R, desde luego el R y R' serán equivalentes entre sí, por serlo al P Pero no sabemos si resultarán R y R' también con la misma altura Lo admitiremos como postulado, a saber :

Dos rectángulos de la misma base y diferente altura no son equivalentes. Quiere decir, que en ninguna forma se pueden descomponer en partes respectivamente iguales (122).

Admitido esto, resultará, que si los rectángulos R y R' que tienen la misma base son equivalentes, las alturas serán iguales.

Ejercicios

Transfórmese un polígono de cinco lados en un rectángulo de base prefijada. Transfórmese un paralelogramo en otro de ángulos iguales y que tenga distinta base que el dado.

LECCIÓN 24

AREAS DE LOS POLIGONOS

127. El concepto de área

·1. *Definición. Llamaremos área de un polígono al ente o propiedad común a ese polígono y a todos sus equivalentes, y que es distinto para los no equivalentes.*

Es decir, que la relación de equivalencia entre polígonos, definida en la lección anterior, permite compararlos, y define una clase de valores, que se llaman áreas, las cuales, como vamos a ver, son magnitudes medibles.

·2. *Las áreas como magnitudes medibles.* Sabemos que todo polígono se puede transformar en un rectángulo equivalente que tenga una base dada (**126** ·3); y, según el postulado de la equivalencia, este rectángulo será el mismo cualquiera que sea el procedimiento de transformación (**126** ·4); resultando también que los polígonos equivalentes tienen que transformarse en rectángulos iguales, para que siendo éstos de la misma base puedan ser equivalentes entre sí.

Vemos, pues, que fijada una longitud, como base de rectángulos, a toda área corresponde un rectángulo cuya altura tiene longitud determinada, y recíprocamente.

Esto permite demostrar que *las áreas de los polígonos son magnitudes medibles*, es decir, se puede verificar entre ellas la operación de medir, análoga a la que se puede efectuar con las longitudes (20). Sigamos el método análogo.

·3. *Suma de áreas.* Dadas dos áreas cualesquiera P y P' para definir su suma construyamos dos rectángulos R y R' que tengan igual base y cuyas áreas sean, respectivamente, P y P'.

El área de otro rectángulo que tenga la misma base que los R *y* R', *cuya altura sea igual a la suma de las alturas de éstos, es a lo que se llama suma de las áreas* P *y* P'.

Esta suma así definida tiene las tres propiedades fundamentales :

a) *Uniforme.* La suma P + P' existe y está determinada unívocamente.

Pues si R es equivalente a R_1, y R' es equivalente a R'_1, la suma R + R' será equivalente a la suma $R_1 + R'_1$ (**123** ·2).

b) *Conmutativa.* P + P' = P' + P. Pues R + R' = R' + R (**123** ·2).

c) *Asociativa.* Se demuestra análogamente.

·4. *El principio de comparación entre las áreas.* Definiendo ahora el concepto de *mayor* y *menor* como para las longitudes (14), podemos ver que también se verifica para las áreas el principio que dice que: *dadas dos áreas se verifica una, y una sola de estas tres cosas : o que la primera es igual a la segunda, o que es mayor, o que es menor.*

Pues los rectángulos de igual base correspondientes tendrán sus alturas de manera que la del primero será igual, mayor o menor que la del segundo. Demostrándose la segunda parte como para las longitudes.

·5. *Continuidad de las áreas.* También se verifican para las áreas los principios de *densidad* y *continuidad*, pues se verican entre las alturas de los rectángulos de igual base (16).

·6. Definiendo ahora la *sustracción* de áreas, la *multiplicación* y *división* por un número, y la *razón* entre dos áreas, como lo hicimos para las longitudes, podremos, finalmente, definir la *medida* de un área P cuando se toma otra P', por unidad, como la razón entre las áreas P y P', o lo que es igual como el número que multiplicado por la segunda nos da la primera, aplicándose a las áreas la teoría de la medida en general.

Pero los polígonos pueden adquirir distintas formas, aun teniendo la misma área, por lo cual suelen tomarse como unidades de áreas las de *cuadrados*, que tienen además su lado con una longitud igual a la unidad de medida de longitudes. Y así,

si se toma como unidad de longitudes el metro, se conviene en tomar como unidad de áreas la de un cuadrado que tenga un metro de lado, llamándosele *metro cuadrado* y designándose : m^2; y si se toma como unidad de longitud de decímetro, la de área será el dm^2, o sea la de un cuadrado cuyo lado es de un dm.

Veamos ahora cómo tomando estas unidades puede referirse la medida de áreas a la medida de longitudes, que suele ser más fácil.

128. Area de un rectángulo

1. *Area de un rectángulo cualquiera. El área de un rectángulo es igual al producto de la base por la altura.*

Si nos referimos solo a valores numéricos, este enunciado breve significa que el número que mide el área de un rectángulo es igual al producto de los números que miden la base y la altura respectiva, siempre que se tome como unidad de áreas la del cuadrado, cuyo lado es igual a la unidad de longitud.

La demostración es inmediata en el caso en que los números que miden la base y la altura son *enteros*. Y así, en la figura 215 tenemos un rectángulo cuya base tiene 4 cm. y la altura 3 cm. Dividiendo la base y la altura en partes iguales a 1 cm., y trazando por los puntos de división paralelas a esa base y altura, queda descompuesto el rectángulo en cm^2, y hay 3 filas de a 4, o sea $(3 \times 4)\ cm^2$, lo que demuestra, en este caso particular, el teorema.

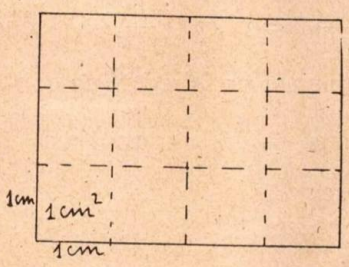


Fig. 215

Para demostrarlo, en general, demostraremos primeramente que : *los rectángulos de igual base son proporcionales a sus alturas* (y por tanto, los de igual altura, son proporcionales a sus bases).

En efecto, si suponemos dos rectángulos R y R' de igual

base, y llamamos a y a' sus respectivas alturas (fig. 216) hay que demostrar que se verifica $\frac{a}{a'} = \frac{R}{R'}$.

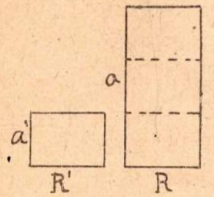


Fig. 216

Y en efecto, si $\frac{a}{a'}$ es *entero*, por ejemplo, $3 = \frac{a}{a'}$ se descompone a en 3 partes iguales a la a', y trazando paralelas a las bases por los puntos de división quedará R descompuesto en 3 partes iguales al R', por lo cual es

$$\frac{R}{R'} = 3 = \frac{a}{a'}.$$

Si es *fraccionario*, por ejemplo, $\frac{a}{a'} = \frac{4}{3}$ se descompone a en 4 partes iguales y a' en 3, que serán iguales a las de a, y con paralelas por los puntos de división quedarán descompuestos igualmente R y R' y será

$$\frac{R}{R'} = \frac{4}{3} = \frac{a}{a'}$$

Y si $\frac{a}{a'}$ es *irracional*, considerando los valores aproximados por defecto y por exceso será $\frac{a}{a'} = \lim. \frac{m}{n}$, o sea $\frac{m}{n} a' < a < \frac{m+1}{n} a'$; por lo cual tomando en la recta que contiene la altura a, un segmento igual a $\frac{m}{n} a'$, y otro igual a $\frac{m+1}{n} a'$, trazando paralelas a las bases por los puntos de división, se forman dos rectángulos, que según el caso anterior son iguales a $\frac{m}{n} . R'$, y $\frac{m+1}{n} R'$, y tales que $\frac{m}{n} R' < R < \frac{m+1}{n} R'$, luego $\frac{R}{R'} = \lim. \frac{m}{n} = \frac{a}{a'}$.

Como las alturas se pueden tomar como bases, queda demostrado también que los rectángulos de igual altura son proporcionales a sus bases.

Pero se demuestra en Aritmética que si una magnitud depende de otras varias, siendo directamente proporcional a cada

una de ellas cuando se conservan constantes las demás, *es directamente proporcional a su producto.* Por lo cual, si un rectángulo R tiene por base y altura *a* y *b*, y otro *r* tiene por base y altura *a'* y *b'*, será $\frac{R}{r} = \frac{a \times b}{a' \times b'}$, o lo que es igual, llamando *k* a la constante de proporcionalidad $\frac{r}{a' \times b'}$, será $R = K \cdot a \times b$.

Se puede aplicar aquí la demostración de Aritmética considerando un rectángulo intermedio, R_1 que tenga la base del uno *b* y la altura del otro *a'*, con lo cual se tendrá

$$\frac{R}{R_1} = \frac{a}{a'} \quad » \quad \frac{R_1}{r} = \frac{b}{b'} \quad » \quad \frac{R}{R_1} \times \frac{R_1}{r} = \frac{a}{a'} \times \frac{b}{b'} \quad » \quad \frac{R}{r} = \frac{a \times b}{a' \times b'}$$

La constante *k* tiene que ser un número abstracto que solo dependa de las unidades de medida, porque determinada la base y la altura de un rectángulo queda determinada el área de éste. Y si se eligen como unidad de áreas la del rectángulo (que entonces es cuadrado), cuyo lado es la unidad de longitud, será $K = 1$, pues cuando *a* tome el valor 1, y *b* el valor 1, tiene que tomar R el valor 1, y tendremos, pues, $R = b \times a$

·2. *Area de un cuadrado. El área de un cuadrado es igual al cuadrado de su lado.* Pues será $c = l \times l = l^2$

Esto demuestra que el metro cuadrado tiene 100 dm^2, lo cual también se puede ver directamente como en la figura 215.

129. Areas de un paralelogramo

El área de un paralelogramo es igual al producto de su base por su altura. Pues el paralelogramo es quivalente a un rectángulo que tenga igual base y altura que él (**124** ·1).

$$P = b \times a$$

130. Areas de un triángulo y de un trapecio

·1. *Triángulo. El área de un triángulo es igual a la mitad de la base por la altura, o a la mitad de la altura por la*

base, o a la mitad del producto de la base por la altura (**125** ·1).

$$t = \frac{1}{2} b \cdot a$$

·2. *Trapecio. El área de un trapecio es igual a la paralela media por la altura, o a la semisuma de las bases por la altura* (125). $T = \frac{1}{2} (B + b) \times a$

131. Area de un polígono

·1. *Polígono regular. El área de un polígono regular es igual al producto del semiperímetro por la apotema.* En efecto, uniendo los vértices con el centro queda descompuesto el polígono regular de *n* lados en *n* triángulos isósceles iguales, en los cuales se puede tomar por base un lado del polígono y la altura respectiva será la apotema, luego el área de uno de estos triángulos de base *l*, y altura *a* será $\frac{1}{2} l \cdot a$; y los *n* triángulos

$$\left(\frac{1}{2} \cdot n\ l\right) \cdot a = \frac{1}{2} p \times a$$

·2. *Polígono cualquiera.* Dado un polígono cualquiera, para hallar su área se puede trazar la diagonal más larga, AD (fig. 217), y por los demás vértices se trazan perpendiculares a esa diagonal. Queda con esto descompuesto el polígono en trapecios rectángulos, y en triángulos rectángulos; y con solo medir las distancias de los vértices a esta diagonal, que serán bases, y las alturas respectivas, tomados en la diagonal dicha, se tendrá el área del polígono al sumar las áreas de las figuras en que se ha descompuesto. Según la figura del polígono podría suceder que en vez de sumar hubiese algunos triángulos o trapecios que restarlos.

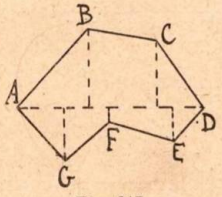


Fig. 217

·3. *Area de un cuadrilátero.* A veces conviene hacer otras descomposiciones, como ocurre con un cuadrilátero convexo, que queda dividido por las diagonales en cuatro triángu-

los (fig. 218), y si por los vértices trazamos paralelas a las diagonales se forma un paralelogramo doble que el cuadrilátero, porque los cuatro triángulos de que se componía el cuadrilátero son iguales a otros cuatro triángulos más que se han formado al trazar las paralelas. Luego: *el área de un cuadrilátero es igual a la mitad del área de un paralelogramo que tiene sus lados paralelos e iguales a las diagonales.*

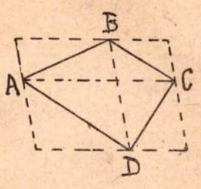


Fig. 218

132. Cuadratura de figuras

·1. El problema de la cuadratura de una figura es el de construir un cuadrado de igual área que esa figura. Como el área de un cuadrado es igual al cuadrado de su lado, el lado del cuadrado equivalente a un rectángulo se hallará buscando la *media proporcional* entre la base y la altura, y lo mismo en las demás figuras (**94** ·1).

·2. Este problema permite transformar un polígono en un cuadrado equivalente. Sabemos, en efecto, transformarlo en un triángulo (**126** ·1) y luego, la media proporcional entre la mitad de la base y la altura, de este triángulo, nos dará el lado del cuadrado equivalente al triángulo, y por tanto, al polígono.

·3. Numéricamente se halla el lado del cuadrado equivalente a una figura, hallando el área de esta figura, y extrayendo la raíz cuadrada del número que la mide. Claro es que se puede luego tomar un segmento cuya medida sea el número obtenido, y ese segmento será el lado del cuadrado.

Ejercicios

Hállese el área de un exágono regular cuyo lado sea igual a 5 cm.

Hállese numéricamente el lado del cuadrado equivalente.

Dibújese el exágono y determínese gráficamente el cuadrado equivalente.

Demostrar que el área de un triángulo equilátero en función del lado *l*, es $l^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Hallar el área de un rombo cuyas diagonales son de 2m y 6 cm.

La vara Castellana equivale a 0,836 m, y tiene 3 pies; averiguar los dm^2 que tiene un pie^2. (7'7637).

Siendo una Ha igual a un Hm^2 averiguar las áreas que tiene una fanega superficial de 3.000 varas cuadradas.

LECCIÓN 25

AREAS DE LAS SUPERFICIES CIRCULARES

133. Area del círculo

·1. *Superficie plana.* Análogamente a como definimos antes la línea plana (**109** ·2), podemos definir ahora la *superficie plana, como toda figura plana perfecta, que sin ser rectilínea, por cada uno de sus puntos pasa al menos una recta que la corta según una figura rectilínea.*

Para definir el *área* de una superficie plana cualquiera, diremos que una tal superficie es *suma* de otras cuando todo punto de la primera pertenece a alguna de estas otras, sin que éstas tengan puntos comunes, excepto, cuando más, puntos aislados o puntos de una línea plana.

Se ha demostrado, por ejemplo, que un polígono y un círculo no pueden ser descompuestos en partes respectivamente iguales, por lo cual las superficies planas en general, no podemos compararlas con los polígonos como comparábamos éstos entre sí (122).

Pero vimos que a cada polígono le corresponde un área determinada, y que si un polígono es suma de otros, su área es suma de las áreas de estos otros; y para extender esta propiedad a las demás superficies planas, de acuerdo con la intuición, establezcamos el :

·2. *Postulado sobre el área de una superficie plana. A toda superficie plana le corresponde un área determinada, tal que si la superficie es suma de otras, su área es suma de las de estas otras.*

Al decir que le corresponde un área determinada, queremos

decir que le corresponde un polígono (127) de área determinada. Y así, a cada círculo le corresponderá un cuadrado determinado, que se considera de igual área que el círculo, aunque no diremos que son equivalentes, porque no se pueden descomponer en partes respectivamente iguales (122).

·3. *Valor del área de un círculo.* Dado un círculo, consideremos el polígono regular inscrito y el circunscrito de n lados, y coloquemos el circunscrito de manera que sus lados sean tangentes en los vértices del inscrito. Desde luego se ve que el área del círculo, que la llamaremos S, es mayor que el área, s_n del polígono inscrito, pues el círculo es igual a la suma de ese polígono y de otra figura (figura 219), y su área será la suma de s_n y del área de esa otra figura (·2). Lo mismo se ve que S es menor que el área del polígono circunscrito, a la que llamaremos S_n; luego:

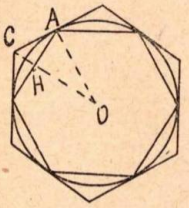


Fig. 219

$$s_n < S < S_n$$

Al crecer n indefinidamente, cualquier valor de s_n es menor que cualquiera de S_n, y por otra parte es fácil ver que la diferencia $S_n - s_n$ acaba por ser más pequeña que cualquier área que se fije, de lo cual se deduce que s_n y S_n tienen límite, el mismo para las dos. Lo podemos ver también, y hallar ese límite, llamando p_n al perímetro del polígono inscrito, y a su apotema, a_n; y asimismo P_n al perímetro del circunscrito, y a su apotema, r, que es el radio de la circunferencia. Será:

$$s_n = \frac{1}{2} p_n \cdot a_n \quad » \quad S_n = \frac{1}{2} P_n \cdot r \quad (131 \cdot 1).$$

Pero si llamamos C a la longitud de la circunferencia, o sea $2\pi r$, sabemos que es (106):

$$\lim p_n = \lim P_n = C = 2\pi r.$$

Observemos, además, que es $\lim a_n = r$, pues la diferencia $r - a_n$ es menor que el semilado, AH, del polígono inscrito, y ese semilado tiende a cero, al crecer n, ya que p_n no pasa de cuatro diámetros.

Se tendrá, pues

$$\lim s_n = \frac{1}{2} \cdot \lim p_n \cdot \lim a_n = \frac{1}{2} c \cdot r = \pi r \cdot r = \pi r^2.$$

$$\lim S_n = \frac{1}{2} (\lim P_n) \cdot r = \frac{1}{2} C \cdot r = \pi r \cdot r = \pi r^2.$$

y como es $s_n < S < S_n$ será

$$S = \lim s_n = \lim S_n = \pi r^2 = \frac{C}{2} \cdot r.$$

Luego *el área del círculo es igual a la semicircunferencia por el radio*, o sea a π por el cuadrado del radio. Y en función del diámetro, $d = 2r$, será

$$S = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4} d^2.$$

·3. *Cuadratura del círculo.* El cuadrado que tiene su área igual a la de un círculo dado no se puede hallar exactamente con la regla y el compás. Se puede hallar con la aproximación que se desee, pues hemos visto que el círculo es de igual área que un rectángulo que tenga por base la semicircunferencia y por altura el radio, por lo cual la media proporcional entre estas longitudes, es decir, la longitud x, que verifique la ecuación: $x^2 = \frac{c}{2} \times r$, será el lado del cuadrado. Y como sabemos rectificar la circunferencia con la aproximación que se quiera (**107** ·5), sabremos hacer con la aproximación que se quiera la cuadratura del círculo (fig. 220).

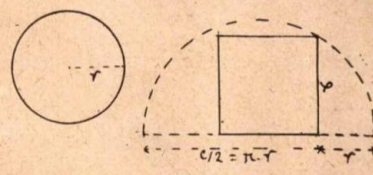


Fig. 220

134. Area de un sector circular

·1. Dado un sector circular, es decir, una porción de círculo limitada por un arco y los radios que van a sus extremos (figura 221), podemos dividir el arco en n partes iguales y unir orde-

nadamente los puntos de división, entre sí, y con el centro. Se forman así n triángulos, que tienen como vértice común el centro de la circunferencia, y se dice que forman un *sector poligonal* de n lados, *inscrito* en el sector circular.

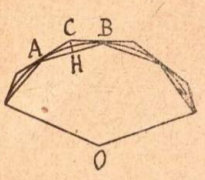


Fig. 221

Si trazamos tangentes por los puntos de división, y por los extremos del arco, uniendo los puntos de división de cada dos tangentes consecutivas con el centro, se forman también triángulos, cuyo vértice común es el centro, y entre todos forman, lo que se llama un sector poligonal *circunscrito*. Los triángulos extremos equivalen a uno de los intermedios, por lo cual el sector poligonal se puede considerar como de n lados iguales entre sí.

Razonando como para el círculo, se ve que el *área del sector circular es el límite de los sectores poligonales inscritos o circunscritos de* n *lados iguales, cuando el número de lados aumenta indefinidamente.*

Se demuestra igualmente que tal límite existe y está determinado para cada sector.

Como el área del sector poligonal es igual también al *semiperímetro por la apotema*, lo que se demuestra como para los polígonos regulares, y como el límite de la poligonal circunscrita es el arco rectificado, resulta :

El área de un sector circular es igual al área de un triángulo que tiene por base el arco rectificado, y por altura el radio.

Demostrándose lo mismo que para el círculo.

·2. En fin, recordando que la longitud de un arco de n grados, y radio r, es $\frac{\pi}{180^\circ} \cdot n \cdot r$ (**108** ·2) el área del sector correspondiente será :

$$\frac{1}{2} \cdot \pi \, r^2 \, \frac{n^\circ}{180^\circ} = \pi r^2 \times \frac{n^\circ}{360^\circ}$$

fórmula que se recuerda fácilmente estableciendo una proporción o regla de tres. Si el sector tuviese 360°, el área sería πr^2;

si tiene n° el área será $x = \pi r^2 \frac{n}{360}$

135. Area de otras figuras circulares

·1. *Area de la corona circular.* Si tenemos dos círculos concéntricos, los puntos pertenecientes al de mayor radio, que no son interiores al de menor radio, forman una figura que se llama *corona circular* (fig. 222).

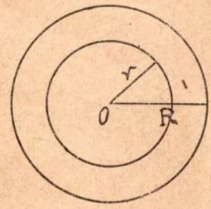


Fig. 222

Es el área de la corona circular la diferencia entre las áreas de los dos círculos; por lo cual, si éstos tienen por radios R y r, el área será :

$$A = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi (R^2 - r^2)$$

·2. *Area del segmento circular.* Se llama segmento circular la porción de círculo limitada por una cuerda y uno de los arcos que ella subtiende (fig. 223). Los radios que van a los extremos del arco determinan, con el arco, un sector circular, y con la cuerda un triángulo OAB. Si el arco es menor que una semicircunferencia, es el área del segmento circular la diferencia entre ese sector y ese triángulo; y si es mayor que la semicircunferencia, es el área del segmento circular la suma de las áreas de ese sector y de ese triángulo.

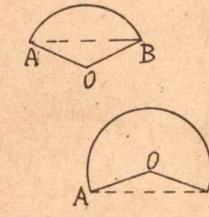


Fig. 223

Calculando, pues, el área del sector y la del triángulo, se tendrá enseguida la del segmento circular.

En el caso del segmento menor que un semicírculo conviene tomar por base del triángulo uno de los radios, y la altura correspondiente, será la semicuerda del arco duplo (fig. 224); por lo cual si llamamos *r* al radio, *l* al arco y *c* a la cuerda del arco duplo, se tendrá :

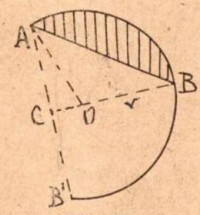


Fig. 224

$$A = \frac{1}{2} r \cdot l - \frac{1}{2} r \cdot AC = \frac{1}{2} r (l - AC) =$$

$$= \frac{1}{2} r \left(l - \frac{1}{2} c\right)$$

o sea: *el área de un segmento circular menor que un semicírculo es igual a la mitad del radio, por la diferencia entre su arco y la semicuerda del arco duplo.*

También se suele llamar segmento circular de *dos bases*, a la porción de círculo comprendida entre dos rectas paralelas (fig. 225). Y su área se halla como diferencia entre las áreas de dos segmentos circulares de una base.

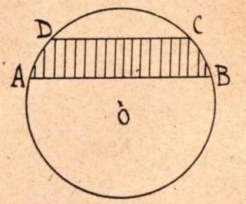


Fig. 225

Ejercicios

Hallar el área y hacer la cuadratura aproximada de un círculo de 5 cm. de radio, y de algunas figuras del mismo.

LECCION 26

RELACIÓN ENTRE LAS AREAS DE DOS FIGURAS SEMEJANTES

136. Areas de polígonos semejantes

1. *Triángulos.* Supongamos dos triángulos semejantes. Tomemos en uno de ellos un lado por base, y llamemos *b* a su longitud; y llamemos *a* la longitud de la altura, perpendicular a esa base. En el otro triángulo tomemos por base el lado homólogo al *b*, y le llamaremos *B*, y a su respectiva altura, A (fig. 226).

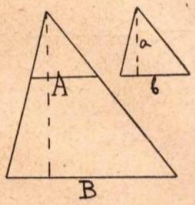


Fig. 226

Como los triángulos son semejantes, los segmentos homólogos son proporcionales, por lo cual es $\frac{B}{b} = \frac{A}{a} = r =$ razón de semejanza; lo cual se evidencia colocándolos en la posición que indica la figura.

Si llamamos *t* y *T* sus áreas, se tendrá :

$$\frac{T}{t} = \frac{\frac{1}{2} B \times A}{\frac{1}{2} b \times a} = \frac{B \times A}{b \times a} = \frac{B}{b} \times \frac{A}{a} = \frac{B}{b} \times \frac{B}{b} =$$

$$= \frac{B^2}{b^2} = \left(\frac{B}{b}\right)^2 = r^2$$

es decir, *las áreas de los triángulos semejantes son proporcionales a los cuadrados de las longitudes homólogas.* O bien, *la razón entre las áreas de dos triángulos semejantes es igual al cuadrado de la razón de semejanza.*

Por ejemplo, si dos triángulos equiláteros son tales que el lado del mayor es tres veces el lado del menor, el área del mayor será nueve veces el área del menor.

·2. *Polígonos.* Supongamos ahora dos polígonos semejantes. Por definición están constituídos por el mismo número de triángulos semejantes y semejantemente dispuestos, siendo la razón de semejanza *r*, de todos ellos, la misma, o sea la razón de dos lados homólogos (99).

Si llamamos $t_1\ t_2\ t_3 \ldots\ t_n$ a los triángulos que forman el polígono *p*, y llamamos $T_1\ T_2\ T_3 \ldots\ T_n$ a los triángulos que forman el polígono P, semejante al *p*, será, en el supuesto en que estas letras indican las áreas :

$$r^2 = \frac{T_1}{t_1} = \frac{T_2}{t_2} = \frac{T_3}{t_3} = \ldots = \frac{T_n}{t_n} = \frac{T_1 + T_2 + \ldots + T_n}{t_1 + t_2 + \ldots + t_n} = \frac{P}{p}$$

luego *también la razón de dos polígonos semejantes es igual al cuadrado de la razón de semejanza.*

El caso más sencillo es el de dos cuadrados tales que el uno tiene un lado doble que el del otro (fig. 227). El área del primero será cuatro veces mayor que la del segundo, como se evidencia descomponiendo el primero.

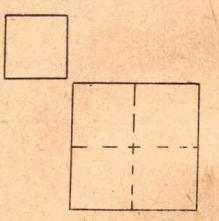


Fig. 227

137. Areas de otras figuras planas semejantes

·1. *Círculos.* Los círculos son siempre figuras semejantes, y la razón de semejanza de dos de ellos es igual a la razón entre los radios o los diámetros (**107** ·1).

Llamando S y s las áreas de dos círculos de radios R y r será :

$$\frac{S}{s} = \frac{\pi R^2}{\pi r^2} = \frac{R^2}{r^2} = \left(\frac{R}{r}\right)^2$$

luego la razón entre las áreas de dos círculos es igual al cuadrado de la razón de semejanza. O bien, las áreas de los círculos son proporcionales a los cuadrados de los radios.

En general, si llamamos S_1 , S_2 , S_3 ... las áreas de varios círculos, y R_1 , R_2 , R_3 ... sus radios respectivos será :

$$\frac{S_1}{R_1^2} = \frac{S_2}{R_2^2} = \frac{S_3}{R_3^3} = \ldots$$

igualdades que se obtienen aplicando sucesivamente la anterior proporción y cambiando los medios. Así :

$$\text{de } \frac{S_1}{S_2} = \frac{R_1^2}{R_2^2} \text{ se deduce } \frac{S_1}{R_1^2} = \frac{S_2}{R_2^2}.$$

Si se quiere hallar la razón entre los semicírculos y los diámetros se tendrá inmediatamente : $\frac{S/2}{s/2} = \left(\frac{2R}{2r}\right)^2$

·2. *Caso general. La razón entre las áreas de dos superficies planas cualesquiera es igual al cuadrado de la razón de semejanza* (fig. 228).

Se razona considerando a la superficie plana de área S como límite de una figura poligonal cuyo contorno está inscrito en el contorno de superficie, y a la de área *s* como límite de la figura poligonal semejante a la primera.

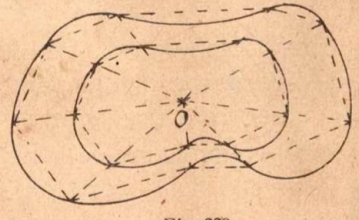


Fig. 228

Llamando a las áreas de esas figuras poligonales de *n* lados S_n y s_n, y llamando *r* a la razón de semejanza, será :

$$S = \lim. S_n \quad » \quad s = \lim. s_n \quad » \quad \frac{S_n}{s_n} = r^2$$

$$\frac{S}{s} = \frac{\lim. S_n}{\lim. s_n} = \lim. \frac{S^n}{s_n} = \lim. r^2 = r^2$$

Este razonamiento, lo mismo que el que hicimos para las longitudes de líneas semejantes, están fundados en ideas intuitivas, y no se les puede exigir rigor lógico (109).

Se puede apurar más el razonamiento, como se hace por ejemplo en Algebra para definir la integral definida por medio

del área de un recinto, limitado por el eje de abcisas, la curva y dos ordenadas.

Se comprende el área del recinto entre una suma de rectángulos contenidos en él, y otra suma de rectángulos que lo contienen entre todos y se hace ver que esas sumas tienen límite.

138. El teorema de pitágoras expresado por áreas

·1. *Caso particular* El teorema de Pitágoras (**88** ·2), puede expresarse por medio de áreas. Si recordamos que el área de un cuadrado es igual al cuadrado de su lado (**128** ·2) se verá que si sobre la hipotenusa y los catetos de un triángulo rectángulo construímos cuadrados (fig. 229) se verifica :

que el cuadrado construído sobre la hipotenusa es equivalente a la suma de los cuadrados construídos sobre los catetos. Pues si llamamos *a*, *b*, *c* la hipotenusa y los catetos, y llamamos A, B, C las áreas de los cuadrados construídos sobre esa hipotenusa y esos catetos, de la igualdad :

$$a^2 = b^2 + c^2 \qquad \text{se deduce la} \qquad A = B + C$$

·2. Pero el teorema merece que esta segunda igualdad la demostremos directamente acudiendo a los teoremas sobre equivalencia de áreas. Para ello, una vez construídos los cuadrados, se traza por el vértice del ángulo recto la perpendicular AH a la hipotenusa, prolongándola suficientemente en ambos sentidos. Esta perpendicular divide al cuadrado construído sobre la hipotenusa en dos rectángulos, que vamos a demostrar que son equivalentes, respectivamente, a los cuadrados

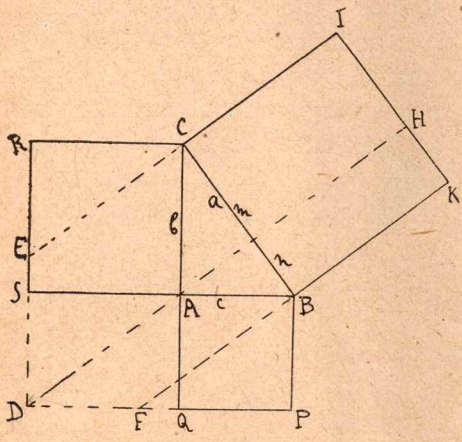


Fig. 229

construídos sobre los catetos, lo cual es expresión del teorema que dice que un cateto es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella (88 · 1).

En efecto, la perpendicular AH pasa por el punto D, intersección de las rectas PQ, RS (ya que los triángulos ADS y ADQ son iguales al ABC), y se forman las siguientes figuras equivalentes.

Cuadrado de lado *b*, equivalente a paralelogramo ACED, y éste, equivalente a rectángulo COHI En los dos casos por tener igual base y altura. Luego los dos rectángulos en que se ha dividido la hipotenusa son equivalentes a los cuadrados C y B, y será $A = B + C$.

Constrúyase, por ejemplo, un triángulo rectángulo cuyos catetos sean 3 y 4 cm, y se comprobará el teorema.

· 3. *Caso general. Si construímos sobre la hipotenusa y los catetos de un triángulo rectángulo tres figuras semejantes, el área de la figura construída sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de las figuras construídas sobre los catetos.*

Y así, por ejemplo, en la figura 230 hemos contruído tres semicírculos, y el área del mayor es igual a la suma de las áreas de los otros dos.

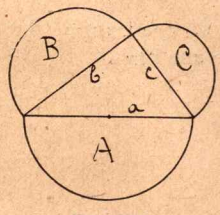


Fig. 230

Se demuestra, en general, observando que las áreas A, B y C de las tres figuras semejantes son proporcionales a los cuadrados de las longitudes homólogas, *a*, *b* y *c*, luego será

$$\frac{A}{a^2} = \frac{B}{b^2} = \frac{C}{c^2} = \frac{B + C}{b^2 + c^2}$$ y al ser $a^2 = b^2 + c^2$, será $A = B + C$

· 4. *Lúnulas de Hipócrates.* En el caso en que las figuras semejantes sean semicírculos, que los construímos como en la figura 231, se forman dos figuras llamadas lúnulas de Hipócrates, tales que : *la suma de las áreas de las lúnulas es igual al área del triángulo rectángulo.* Y en efecto, si al semicírculo construído sobre la hipotenusa le restamos dos segmentos circulares, nos queda el triángulo, y si a la figura formada por los

dos semicírculos construídos sobre los catetos le restamos los mismos segmentos circulares, nos quedan las lúnulas, que son las figuras rayadas.

Resulta, pues, que las lúnulas son figuras de las cuales se puede hacer la cuadratura exacta con la regla y el compás, por lo cual en la antigüedad se les dió mucha importancia, creyendo, erróneamente, que iban a servir de punto de partida para resolver el problema de la cuadratura del círculo.

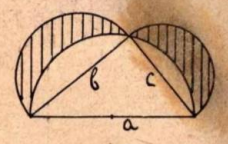


Fig. 231

·5. *Aplicaciones.* El teorema de Pitágoras se puede aplicar a este problema : *hallar un cuadrado que sea suma o diferencia de otros dos;* o más en general, *hallar una figura cuya área sea igual a la suma o diferencia de dos figuras semejantes dadas.* La resolución es inmediata.

Ejercicios

Constrúyanse dos círculos y hállense gráficamente otros dos círculos que sean respectivamente iguales a la suma y diferencia.

Constrúyanse dos lúnulas de Hipócrates y hágase su cuadratura.

Hállese numérica y gráficamente un cuadrado doble que otro.

LECCION 27

METODOS GENERALES PARA LA RESOLUCION DE PROBLEMAS GEOMETRICOS

139. Idea sobre la resolución de problemas

Los problemas de Geometría se pueden clasificar en dos grupos: *gráficos* o de construcción, y *numéricos* o de cálculo.

Para resolver un problema gráfico no se admiten en la Geometría teórica más instrumentos que la *regla* y el *compás*. Pero con la regla, el único problema elemental que se resuelve es construir una recta conocidos dos puntos de ella; y con el compás, construir una circunferencia dados el centro y el radio; luego a estos problemas elementales deben reducirse los demás.

Por eso hay muchos problemas, que aún pareciendo muy sencillos, son irresolubles con estos instrumentos. Se han hecho célebres los problemas de la *trisección del ángulo* y de la *cuadratura del círculo*.

La regla práctica más general para resolver un problema, es suponerlo resuelto, construyendo aproximadamente la figura, y tratando de encontrar relaciones que liguen los datos con las incógnitas. Así procedimos, por ejemplo, en el problema del párrafo (94 · 2).

Veamos algunos métodos que se aplican en muchísimos casos.

140. Método de los lugares geométricos

· 1. Consiste este método en prescindir provisionalmente de una de las condiciones impuestas por el problema, y cons-

truir, si se sabe, el lugar geométrico de los puntos que verifican las otras condiciones; prescindir luego de otra condición, conservando todas las demás, incluso la que no se había considerado antes, y se construye el lugar geométrico de los puntos que verifican estas condiciones; los puntos comunes a los dos lugares geométricos, verifican todas las condiciones del problema.

·2. Ejemplos: a) *Construir una circunferencia de radio dado y que pase por dos puntos dados* A y B (figura 232). Prescindiendo de que se conoce el radio, construyamos el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que pasan por A y B, que será la mediatriz de AB; y prescindiendo luego de que pase por A, construyamos el lugar geométrico de los centros de las circunferencias de radio igual al dado, y que pasan por B, que estará formado por una circunferencia de radio *r* y centro B. Los dos lugares geométricos pueden cortarse en dos puntos, que serán centros de dos circunferencias, soluciones del problema (cuando sea AB < 2r); o encontrarse en un solo punto (cuando sea AB = 2r); y habrá una solución; o no encontrarse (cuando sea AB > 2r), y el problema no tendrá solución.

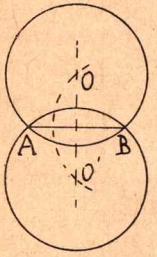


Fig. 232

b) *Constrúyase igualmente una circunferencia de radio dado que pase por un punto dado, y que sea tangente a una recta, o bien a una circunferencia dada* (60).

141. Método de semejanza

·1. Este método se utiliza cuando de una figura nos dan varios datos angulares y un dato lineal. *Se prescinde de este dato lineal y se construye una figura cualquiera con los datos angulares dados, la cual será semejante a la que se nos pide* (96).

·2. Ejemplo: *construir un triángulo cuando se conocen dos ángulos y el perímetro.* Prescindiendo del perímetro, constrúyase un triángulo cualquiera que tenga dos ángulos iguales a

los dados. Llamando p a su perímetro, que se puede hallar, y P al perímetro que se nos da, la relación $\frac{p}{P}$ será igual a la relación $\frac{a}{A}$ de un lado a del triángulo construído al lado homólogo del que se nos pide.

Y en la proporción $\frac{p}{P} = \frac{a}{A}$ conocemos tres términos, y podremos hallar el cuarto A, construyendo una cuarta proporcional (**82** ·5).

Con el lado A, se podrá construir el triángulo que se pide; el cual puede colocarse en posición homotética al primero (**100** ·2).

142. Método de figuras parciales

·1. *Este método consiste en reducir la construcción de la figura a la de otras figuras parciales que se saben construir con los datos de la primera.*

·2. Ejemplo: *Construir un paralelogramo dados dos lados, no opuestos, y la diagonal que une los extremos no comunes.* Esta diagonal forma con los lados conocidos un triángulo que sabemos construir (**69** ·5). A este método se reduce el problema de *construir las tangentes comunes a dos circunferencias*. En la figura 233 se observa que se sabe construir el triángulo OO'P, que tiene OP igual a la diferencia de los radios (73).

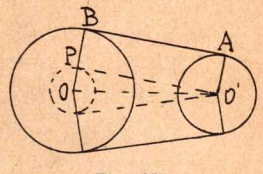


Fig. 235

La construcción de las tangentes comunes interiores (cuando existen), se reduce a la construcción de un triángulo rectángulo que tiene un cateto igual a la *suma* de los radios.

143. Introducción de los datos en la figura

·1. A veces, para la resolución de un problema gráfico, conviene *introducir los datos en la figura*, bien sea directamente,

o bien otros datos que dependen de ellos. He aquí un ejemplo de cada caso.

a) *Construir un triángulo conocidos, un ángulo* A; *un lado adyacente* b, *y la suma de otros dos lados* a + c. Suponiendo el problema resuelto, se introduce en la figura el dato a + c, prolongando AB por B una longitud igual a BC (fig. 234). Entonces la recta DC es paralela a la bisectriz del ángulo B (90), luego conocemos también este ángulo.

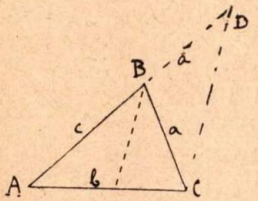


Fig. 234

b) *Construir un triángulo conocidos dos lados y la mediana que parte de su vértice común.* Introduciendo el *doble de la mediana* se ve que su extremo forma con los vértices un paralelogramo que se sabe construir.

144. Problemas numéricos

Para calcular algunas cantidades geométricas, o para hallar relaciones entre otras se recurre al método de las ecuaciones, que consiste en expresar por medio de igualdades las relaciones que existen entre las cantidades de que se trata y otras auxiliares, que se eliminan después.

Ejemplo : *para hallar la relación que existe entre los tres lados* a, b, c *de un triángulo rectángulo*, introducimos las cantidades auxiliares *m* y *n*, que son las proyecciones de *b* y *c* sobre la hipotenusa, con lo cual se obtiene (88): $b^2 = a \cdot m$, $c^2 = b \cdot n$; pero hay que eliminar *m* y *n*, por lo cual necesitamos otra relación, que es la $m + n = a$. Y para eliminar *m* y *n* basta sumar las dos primeras y tener en cuenta la tercera, dando :

$$b^2 + c^2 = a^2.$$

Pero el uso sistemático de las ecuaciones forma el:

145. Método de la geometría analítica

·1. Este método, que constituye una rama bastísima de la Geometría, fué iniciado por Descartes. Consiste en representar

los puntos por sus coordenadas, y las figuras por ecuaciones (116), y reducir las construcciones geométricas a operaciones algebráicas.

·2. Ejemplo: *hallar por el método de la Geometría Analítica los puntos comunes a una elipse, cuyos semiejes tienen por longitudes* a *y* b, *con la recta bisectriz del ángulo que forman estos semiejes* (fig 235).

Tomemos por ejes de coordenadas los mismos ejes de la elipse, en cuyo caso la ecuación de esta sabemos que es (119): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

La bisectriz del ángulo formado por las direcciones positivas de los ejes es una recta cuyos puntos tienen todos la misma abcisa que ordenada, por lo cual su ecuación es: $y = x$.

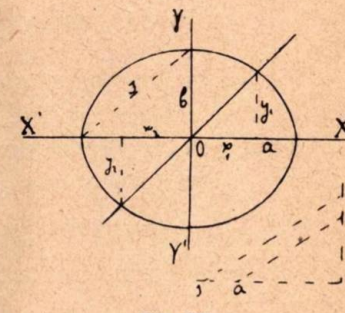


Fig. 235

Los puntos de intersección de la curva con la recta serán los puntos cuyas coordenadas verifican simultáneamente a las dos ecuaciones; por tanto, cada punto corresponderá a una solución del sistema que forman esas dos ecuaciones. Para resolver el sistema eliminemos la *y*, obteniéndose inmediatamente la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad \text{que da: } x^2 = \frac{a^2\,b^2}{a^2 + b^2}$$

$$\text{o sea: } x = \pm \frac{a\,b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Luego el sistema tiene dos saluciones reales, que son:

$$x_1 = y_1 = \frac{a\,b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad » \quad x_2 = y_2 = -\frac{a\,b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

y la recta cortará a la curva en dos puntos reales que tienen por coordenadas estos valores de *x* e *y*.

El denominador $\sqrt{a^2 + b^2}$ representa la distancia entre dos vértices de la elipse, que no estén en el mismo eje, y si le llamamos *s*, será: $x_1 = \frac{a\,b}{s}$. Luego se puede determinar gráfica-

mente la coordenada x_1, o la y_1, del punto de intersección, construyendo una cuarta proporcional, como se indica en la figura.

Vemos, pues, que el cálculo nos ha servido en este caso de auxiliar para llegar a una construcción geométrica. Y además nos ha suministrado fórmulas para calcular las coordenadas de los puntos de intersección.

146. Construcción de expresiones algebráicas

En los problemas en que interviene el Algebra, aplicada a la Geometría, es preciso interpretar gráficamente una expresión, y efectuar las construcciones que ella indica.

·1. *Expresiones monomias.* La *x* dada por la expresión $x = \frac{ab}{c}$ o lo que es igual $x \cdot c = ab$ » $\frac{x}{b} = \frac{a}{c}$, se construye por una cuarta proporcional a las magnitudes *a*, *b*, *c*.

Si la expresión es $x = \frac{abc}{de}$, se construyen sucesivamente estas *dos cuartas proporcionales* $x_1 = \frac{ab}{d}$ » $x = \frac{x_1 c}{e}$.

Y análogamente, cuando en el denominador hay *n* factores y en el numerador $n + 1$.

Cuando la expresión *no es homogénea*, se puede hacer, introduciendo la unidad de medida. Y así, para construir la *x* dada por la expresión $x = \frac{a}{b}$ se escribe $x = \frac{a.1}{b}$ y habrá que hallar una cuarta proporcional. Es claro, qué si *a* y *b* son segmentos, el *x* será un número abstracto, que será la medida de esa cuarta proporcional. Y si *a* y *b* son números, lo será *x*, y tendremos un método para calcular gráficamente el cociente $\frac{a}{b}$.

Si se trata de un *producto* $x = a \cdot b$ se pone $x \cdot 1 = a \cdot b$, o sea $\frac{x}{a} = \frac{b}{1}$.

·2. *Expresiones polinomias.* Las expresiones $(a + b)$ o $(a - b)$ se construyen inmediatamente. Otras expresiones de esta forma :

$$x = a + \frac{bc}{d} - \frac{efg}{r.1}.$$

se pueden construir, construyendo parcialmente cada término, y luego sumándolos o restándolos.

·3. *Expresiones irracionales.* La expresión $x = \sqrt{a \cdot b}$ se construye hallando una media proporcional entre *a* y *b* (94 ·1).

Esto permite construir expresiones de este tipo

$$x = a \cdot \frac{\sqrt{bc}}{d} + c.$$

En particular, se sabrán hallar gráficamente las *raíces cuadradas de los números*, pues por ejemplo, para hallar $\sqrt{7}$ pondremos: $x = \sqrt{7}$ » $x = \sqrt{7 \cdot 1}$ » $x^2 = 7 \cdot 1$; y hallando la media proporcional entre un segmento de 7 unidades de longitud, y otro de 1, se obtendrá otro segmento cuya medida es *x*.

La expresión $\sqrt{b^2 + c^2}$ representa la *hipotenusa* de un triángulo rectángulo cuyos catetos son *b* y *c*. Y la expresión $\sqrt{a^2 - b^2}$ representa un cateto, siendo el otro cateto *b*, y la hipotenusa *a*.

Aplicando reiteradamente el procedimiento a ésta:

$x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d^2}$ se hallará primero $x_1 = \sqrt{a^2 + b^2}$, luego $x_2 = \sqrt{x_1^2 + c^2}$, y por fin $x = \sqrt{x_2^2 - d^2}$.

Si la expresión *no es homogénea*: $x = \sqrt{a^2 + b}$, se construye $x = \sqrt{a^2 + b \cdot 1}$ hallando primero $x_1 = \sqrt{b \cdot 1}$, y luego $x = \sqrt{a^2 + x_1^2}$.

147. Resolución gráfica de la ecuación de segundo grado

Sea la ecuación de segundo grado con una variable $ax^2 + bx + c = 0$. Dividiendo por *a*, y llamando $\frac{b}{a} = -s$ » $\frac{c}{a} = p$, queda en la forma $x^2 - sx + p = 0$, y como se sabe por Algebra, *s* representa la suma de las raíces, y *p* el producto. Distingamos tres casos:

a) *La suma y el producto son positivos.* Entonces, en el caso de que las raíces sean reales, tienen que ser positivas. El problema se reduce *a construir dos segmentos conocida su suma y la raíz cuadrada de su producto*, que son *s* y $\sqrt{p}$. Es claro, que la *s* y *p* serán generalmente números, pero en

cuanto se tome una unidad de medida, tomaremos un segmento de s unidades, y ese representará la suma de las raíces; y el segmento x dado por $x = \sqrt{p.1}$ representará la raíz cuadrada del producto.

Para hallar esas raíces construímos sobre la suma una semicircunferencia (fig. 236); en un extremo del diámetro trazaremos una tangente, y en ella tomaremos $BC = \sqrt{p}$. Por el extremo trazaremos una paralela al diámetro, la cual cortará a la circunferencia en dos puntos D y D' cuando las raíces sean reales y desiguales. Una perpendicular al diámetro desde cualquiera de esos puntos divide al diámetro en dos segmentos cuyas medidas son las soluciones de la ecuación:

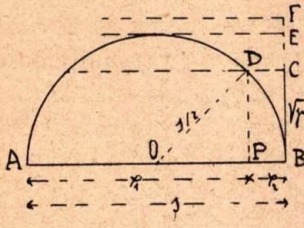


Fig. 236

$$AP = x_1 \quad » \quad PB = x_2.$$

Y en efecto, la semicuerda $PD = \sqrt{p}$ es media proporcional entre los segmentos en que divide al diámetro (92); y se tendrá:

$$(\sqrt{p})^2 = p = x_1 \times x_2 \quad » \quad x_1 + x_2 = AB = s.$$

Esto permite calcular las raíces:

$$x_1 = OA + OP = \frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p} \quad » \quad x_2 = \frac{s}{2} - \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p}.$$

Si es $\sqrt{p} = \frac{s}{2}$ *las raíces son iguales* y la paralela al diámetro es *tangente*. Y si es $\sqrt{p} > \frac{s}{2}$ las raíces *son imaginarias*, y la paralela al diámetro es entonces *exterior*.

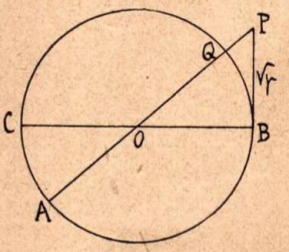


Fig. 237

b) Si es $s < o$ » $p > o$, las dos raíces son *negativas;* pero su valor absoluto se calcula como en el caso anterior.

c) Si es $p < o$, las raíces son de signo contrario, y el valor absoluto de s indica *su diferencia*.

Es decir, que las dos raíces son una positiva y otra negativa, y su suma algebráica, que es s, tiene por módulo la diferencia entre los módulos de ellas. La construcción gráfica de los módulos de las raíces se reduce a la resolución de este problema:

Construir dos segmentos conociendo su diferencia y la raíz cuadrada de su producto. Para resolverlo se construye un segmento, CB (fig. 237), igual a la diferencia dada, y sobre él, como diámetro, se traza una circunferencia. Por el extremo B, se traza un segmento BP, tangente en B, y cuya longitud sea igual a la raíz cuadrada del producto, o sea $\sqrt{p}$.

Si O es el centro de la circunferencia, la recta PO determinará dos segmentos, PA y PQ, que son los segmentos pedidos. Y en efecto, se tiene :

$$PA - PQ = QA = CB \quad » \quad PB^2 = PA \times PQ$$

También la figura permite calcular las raíces en este caso, y lo dejamos como ejercicio.

Ejercicios

Propónganse y resuélvanse problemas de cada uno de los métodos explicados. Con las letras P (punto), R (recta), C (circunferencia), se pueden hacer 10 combinaciones ternarias con repetición : PPP, PPR,... CCC; que corresponden a 10 problemas, en los cuales se buscan circunferencias que pasan por P o son tangentes a R y a C. Resuélvanse. Construir la expresión $x = \frac{a \cdot b}{c} - \sqrt{d \cdot e} + \sqrt{f^2 - g^2}$.

APÉNDICE

Problemas de recapitulación

Construir una circunferencia de radio dado,

1. que sea tangente a dos rectas dadas;
2. o que sea tangente a una recta dada y a una circunferencia dada;
3. o que sea tangente a dos circunferencias dadas.

Construir un triángulo conociendo,

4. el lado a, la altura perpendicular a él, h_a, y la mediana que va a su punto medio, m_a;
5. o el ángulo A, el lado opuesto a y h_a,
6. o A, a y m_a.
7. Construir un cuadrilátero ABCD conociendo AB, BC, AC, BD y $\hat{D}$.
8. Construir un cuadrilátero inscriptible conociendo $\hat{A}$, $A\hat{B}D$, AC y BD.
9. Construir un paralelogramo conociendo AB, AC y AD.
10. Construir un cuadrado conociendo la diferencia entre una diagonal y un lado.
11. Por un punto dado, trazar una recta que forme ángulos iguales con dos rectas dadas.
12. Construir un triángulo isósceles conociendo la altura y la mediana relativas a uno de sus lados iguales.
13. Construir un trapecio conociendo sus cuatro lados.
14. Por un punto dado, trazar una recta que determine sobre los lados de un ángulo dado segmentos que estén entre sí en una relación dada.
15. Construir un triángulo equilátero dada la altura.
16. Construir un triángulo rectángulo dada la hipotenusa y la suma de los catetos.
17. Construir un triángulo conociendo un lado y dos medianas, una de las cuales corresponde a ese lado.
18. Construir sobre un segmento dado como base un triángulo isósceles que tenga el ángulo en el vértice doble que el ángulo en la base.
19. Construir una recta que tenga distancias dadas a dos puntos dados.
20. Determinar en un triángulo dado el punto desde el cual se ven los tres lados bajo ángulos iguales.
21. Construir un cuadrado equivalente a la mitad de otro.

22. Construir un rectángulo dado el perímetro, y que sea equivalente a otro rectángulo dado.
23. Construir un triángulo dado un lado, el ángulo opuesto y la relación entre los otros dos lados.
24. Hallar la base de un triángulo cuya área es de 42 dm^2 y cuya altura es de 6 dm (Resultado: 14 dm).
25. Hallar el área de un triángulo equilátero en función del lado *l*, y aplicar el problema al caso en que el lado valga 6 dm (Resultado: 155880 mm^2).
26. Conociendo por el problema anterior el área de un triángulo equilátero de 6 dm de lado, hállese el área de otro triángulo equilátero, cuyo lado es de 3 m. (Resultado: 3897000 mm^2).
27. Hallar el lado del triángulo equilátero inscrito en un círculo que tiene de área 20 cm^2 (Resultado: 4,37 cm).
28. La altura perpendicular a la hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 12 metros, y su pie dista 9 metros de un extremo de la hipotenusa; calcular esa hipotenusa (Resultado: 25 m).
29. Calcular los catetos de un triángulo rectángulo sabiendo que el pie de la altura perpendicular a la hipotenusa dista 1,08 y 1,92 metros de los extremos de ésta (Resultado: 1,80 y 2,4 metros).
30. Hallar el área de un exágono regular de 1,5 m de lado (Resultado: 5,84 m^2).
31. Hallar el radio de un círculo cuya área vale 2,010624 m^2 (Resultado: 0,8 m).

Demostración de algunos teoremas

En el texto hemos dejado sin demostrar algunos teoremas, por razones de brevedad, y porque son casi evidentes. Ahora vamos a insistir sobre el principio de la divisividad del segmento (18 ·2) y sobre la proposición de Arquímedes (17 ·4), porque son la base de la importantísima teoría de la medida de longitudes; y enseguida insistiremos sobre la intersección de una recta y una circunferencia (58), o de dos circunferencias (60) porque son la base para las construcciones gráficas.

Proposición de Arquímedes. *Si* a *y* b *son dos longitudes absolutas desiguales existe un múltiplo de la menor que excede a la mayor.* Es decir, si es $a < b$ existe un número natural *n*, tal que es $na > b$.

Para demostrarlo observemos primeramente que dada una longitud *k* y dado un número *n*, existe otra longitud *h*, tal que $nh < k$.

Pues la longitud *k* se puede dividir en dos partes desiguales (1 ·3), y llamando h_1 a la menor será $2 \cdot h_1 < k$. La h_1 se puede dividir en otras dos partes desiguales, y llamando h_2 a la menor será $2^2 \cdot h_2 < k$ y así siguiendo llegaremos a una h tal que sea $2^n \cdot h < k$, o bien $n \cdot h < k$.

Demostrado esto vamos a ver que si es $a < b$ tiene que existir un número *n* tal que sea $a \cdot n > b$. Pues si tal número no existiera, podría-

mos dividir todas las longitudes en dos clases : la clase inferior formada por todas las longitudes, tales como la *a*, cuyos múltiplos no exceden a la *b*, y la clase superior formada por todas las longitudes, tales como la *b*, que tienen algún múltiplo que excede a la *b*. Según el principio de continuidad (16 ·2), existiría entonces una longitud, *c*, perteneciente a la primera o a la segunda clase, pero tal que las longitudes menores que ella pertenecen a la clase inferior, y las mayores que ella, a la clase superior.

Pero no puede ser, pues si *c* pertenece a la clase inferior, la magnitud $c + c = 2c$ pertenece también a la clase inferior, ya que para todo número *n* se verifica : $(2c) . n = (2n) . c < b$ y si *c* pertenece a la clase superior, existirá un número *n* tal que sea $n . c > b$ y hallando una longitud *h* tal que sea $nh < nc - b$ la longitud $(c - h)$ pertenecerá también a la clase superior, puesto que es $n . (c - h) = nc - nh > b$.

Por tanto, admitido el principio de continuidad se deduce el de Arquímedes.

Principio de divisibilidad del segmento. *Todo segmento se puede dividir en* n *partes iguales, cualquiera que sea el número natural* n

En efecto, llamando *b* a la longitud del segmento dado, vamos a demostrar que para todo número natural que se nos dé, *n*, existe una longitud, *a*, tal que es : $a . n = b$.

Pues ya hemos visto en el teorema anterior que existen longitudes *h*, tal que es $h . n < b$. Podemos por tanto clasificar todas las longitudes en dos clases : la clase inferior formada por aquellas cuyo múltiplo *n*-simo es inferior a *b*, y la clase superior formada por todas las demás. Según el postulado de continuidad (16 ·2), habrá una longitud, *a*, tal que todas las longitudes menores que ella pertenecen a la clase inferior, y las mayores que ella, a la clase superior. Podemos ver que la *a* es precisamente una longitud que cumple la condición $a . n = b$; pues si fuese $a . n < b$ hallando una longitud, *k*, tal que fuese $n . k < b - a . n$ la suma $(a + k)$ pertenecería a la clase inferior, ya que es $(a + k) . n = a . n + k . n < b$; y si fuese $an > b$ buscando una longitud, *k'*, tal que fuese $nk' < a . n - b$, la diferencia $(a - k')$ pertenecería a la clase superior, ya que es

$$(a - k') . n = a . n - k'n > b.$$

Intersección de una recta y una circunferencia. *Si una recta que está en el plano de una circunferencia dista del centro de ésta una longitud menor que la del radio, la recta tiene común con la circunferencia, dos puntos.*

En efecto, sea la circunferencia de centro O, de la figura 84, y sea la recta la PQ. Trazando la perpendicular OP, desde el centro a la recta, la distancia OP será menor que el radio, y el punto P es interior a la circunferencia. Se ve también que las dos semirrectas de origen P tienen puntos exte-

riores a la circunferencia, pues basta tomar segmentos PQ, iguales al diámetro, por ejemplo, y entonces OQ será mayor que el radio, y Q será exterior. De aquí que los puntos de una cualquiera de las semirrectas PQ, podemos clasificarlos en dos clases; la una formada por los puntos interiores a la circunferencia, tal como el P, la otra formada por los demás, tal como el Q. Según el postulado de continuidad (6), existirá un punto R, tal que todos los que están a su izquierda pertenecen a la primera clase y todos los de su derecha a la segunda. Pues bien, ese punto R está precisamente en la circunferencia; pues si estuviera en el interior podríamos tomar a la derecha de R un segmento RR' igual a la diferencia entre el radio y la distancia OR, y entonces, OR' sería menor que el radio, por ser menor que la suma OR + RR', y tendríamos a la derecha de R un punto R' también interior a la circunferencia; y si R fuese exterior a la circunferencia, podríamos tomar igualmente a su izquierda un segmento RR" que fuese igual a la diferencia entre OR y el radio, por lo cual la distancia OR" sería mayor que el radio, por ser mayor que la diferencia OR — RR", y tendríamos a la izquierda de R un punto exterior a la circunferencia.

Intersección de dos circunferencias. *Cuando dos circunferencias de un plano tienen sus centros a una distancia menor que la suma de los radios y mayor que su diferencia, esas circunferencias tienen dos puntos comunes.*

En efecto, sean las circunferencia de centros O y O' de la figura 88. En el párrafo 60 hemos visto que la circunferencia de centro O' tiene puntos, tal como el N exteriores a la circunferencia de centro O, y puntos, tal como el M interiores. Los puntos M y N dividen a la circunferencia de centro O' en dos semicircunferencias; consideremos una cualquiera de ellas, por ejemplo, la superior. Entonces, todas las distancias desde el punto O a los de esa semicircunferencia van aumentando, desde la OM hasta la ON (59). Podemos dividir los puntos de dicha semicircunferencia en dos clases: la primera clase formada por los puntos, tales como el M, cuya distancia al punto O es menor que el radio OA; y la segunda formada por los demás puntos, tales como el N. Como los puntos de la circunferencia se corresponden con los rayos que parten del centro, y en el haz de rayos se verifica el postulado de continuidad (23 ·4), existirá un punto P, tal que todos los que le preceden distan del centro O, menos que el radio OA, y todos los que le siguen, distan del centro más (o igual) que el radio OA.

Podemos ver que ese punto P dista de O una longitud igual a ese radio OA, por lo cual está en las dos circunferencias. Pues si OP fuese interior a la circunferencia de centro O, podríamos tomar, a partir de P, hacia la derecha una cuerda, PP', igual o menor que la diferencia OA — OP, y entonces el punto P' resultaría también interior a la circunferencia de centro O; y si fuese P exterior habría igualmente otro punto a su izquierda interior a esa circunferencia.